Räumliche Helmert-Transformation variabler Koordinaten im Gauß-Helmert- und im Gauß-Markoff-Modell

Karl-Rudolf Koch

Zusammenfassung
Die Methode der kleinsten Quadrate bestimmt die unbekannten Parameter von Koordinatentransformationen derart, dass die Ergebnisse von der Transformationsrichtung unabhängig sind, sofern die Koordinaten des Startsystems und die des Zielsystems als Zufallsvariable mit identischen Kovarianzmatrizen eingeführt werden. Dies wird am Beispiel der räumlichen Helmert-Transformation gezeigt. Weiter wird nachgewiesen, dass die geschätzten Parameter identisch sind, wenn im Gauß-Helmert-Modell oder nach Einführung zusätzlicher unbekannter Parameter im Gauß-Markoff-Modell ausgewertet wird.

Summary
The method of least squares determines the unknown parameters of coordinate transformations such that the results are independent of the direction of the transformation, if the coordinates of the starting system and the coordinates of the final system are considered as random variables with identical covariance matrices. This is shown for the example of the three-dimensional Helmert transformation. In addition it is proven that the estimated parameters are identical, if the Gauss-Helmert model or, after introducing additional unknown parameters, the Gauss-Markoff model is applied for the analysis.

1 Einleitung

Wer Beispiele zur räumlichen Helmert-Transformation berechnet hat, bei der sowohl die Koordinaten des Startsystems als auch die Koordinaten des Zielsystems als Zufallsvariable mit identischen Kovarianzmatrizen eingeführt und bei der die unbekannten Transformationsparameter mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden, der weiß, dass diese Transformation unabhängig von der Wahl der Transformationsrichtung ist. Man erhält unabhängig von der Wahl des Start- oder Zielsystems für die Koordinatentransformation übereinstimmende Ergebnisse, also »eindeutige« Transformationsparameter. Dies lässt sich auch theoretisch begründen, wie durch Koch (2001) geschehen, da Lenzmann und Lenzmann (2001b) eine Abhängigkeit von der Transformationsrichtung behauptet hatten. Unabhängig von Koch (2001) weist auch Reinking (2001) darauf hin, dass mit der Methode der kleinsten Quadrate eindeutige Koordinatentransformationen erhalten werden, falls die Koordinaten des Start- und Zielsystems als Zufallsvariable eingeführt werden. Er demonstriert seine Aussage anhand des von Lenzmann und Lenzmann (2001b) gewählten Beispiels für die Geradenausgleichung, indem er identische Ergebnisse erhält.

Dennoch beharren Lenzmann und Lenzmann (2001a) auf ihrer Aussage der Abhängigkeit der Koordinatentransformation von der Transformationsrichtung, sofern ein Maßstabsparameter vorhanden ist, was bei der Helmert-Transformation der Fall ist. Abhängigkeit von der Transformationsrichtung behauptet auch Lenzmann (2001). Die Autoren stützen sich auf ihren Beweis in Lenzmann und Lenzmann (2001b), der aber nicht korrekt ist. Sie wollen zeigen, dass die einfache Transformation

$$\boldsymbol{y} = m\boldsymbol{x} \tag{1.1}$$

abhängig von der Transformationsrichtung ist. Der Vektor $\boldsymbol{x}$ enthält die variablen Koordinaten beliebiger Dimensionen von Punkten im Startsystem und $\boldsymbol{y}$ die variablen Koordinaten im Zielsystem, m ist der unbekannte Maßstab. Sie bestimmen den Schätzwert von m im Gauß-Helmert-Modell (Wolf 1978), dem Allgemeinfall der Ausgleichungsrechnung, da in (1.1) in jeder Gleichung eine Koordinate des Startsystems, eine des Zielsystems und der unbekannte Maßstab auftreten. Für die Linearisierung wird angenommen, wie man leicht nachrechnen kann, dass der Näherungswert für m gleich Eins und die Näherungswerte für die Koordinaten $\boldsymbol{x}$ des Startsystems identisch mit den Koordinaten selbst sind. Für diese Näherungslösung beweisen Lenzmann und Lenzmann (2001b) die Abhängigkeit von der Transformationsrichtung. Diese Näherungslösung ist aber nicht identisch mit der Lösung, die sich erst durch Iteration ergibt, wobei Konvergenz vorausgesetzt wird. Insofern ist der Beweis falsch, da die Abhängigkeit der Näherungslösung von der Transformationsrichtung bewiesen wird. Die Lösung selbst ist unabhängig von der Transformationsrichtung, denn aufgrund der Eigenschaft der Methode der kleinsten Quadrate besitzen die durch $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ bestimmten Punkte die kürzesten Abstände zur zulässigen Menge der Punkte, die der Transformation (1.1) genügen. Hierauf wird im 4. Abschnitt näher eingegangen. Beliebig gewählte Beispiele demonstrieren, dass die Transformation (1.1) unabhängig von der Transformationsrichtung ist, falls $m \neq 0$ ist, $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ Zufallsvektoren mit identischen Kovarianzmatrizen sind und die Näherungswerte so gewählt werden, dass die Iterationen konvergieren.

Die von Lenzmann und Lenzmann (2001b) aufgestellte Forderung nach der minimalen Summe der Quadrate der senkrechten Abstände wird von der Methode der kleinsten Quadrate erfüllt. Die von ihnen vorgenommene explizite Berechnung der Lotfußpunkte ist nicht erforderlich. Sie kann aber dann sinnvoll sein, wenn zur Berechnung der kürzesten Abstände, auch orthogonale Distanz-Regression genannt, die Änderungen der Lotfußpunkte in Abhängigkeit von den Änderungen der unbekannten Parameter des Schätzproblems iterativ berechnet werden, um effiziente Rechenverfahren zu gewinnen (Helfrich und Zwick 1993, 1995, 1996).

Für die Geradenausgleichung überführt Reinking (2001) das Gauß-Helmert-Modell durch zusätzliche unbekannte Parameter in das Gauß-Markoff-Modell. Dieser Modellwechsel ist auch durch Koch (2001) beschrieben und durch Koch (2000b, S. 88) allgemein abgehandelt. Er ist praktisch, da Rechenprogramme, die für das häufig angewandte Gauß-Markoff-Modell entwickelt wurden, auch für Parameterschätzungen angewendet werden können, die das Gauß-Helmert-Modell verlangen. Von dieser Überführung in das Gauß-Markoff-Modell behaupten Lenzmann und Lenzmann (2001a), dass das ursprüngliche Gauß-Helmert-Modell verlassen werde, dass also in den beiden Modellen unterschiedliche Ergebnisse zu erwarten wären, da, wie sie sich ausdrücken, »Identitätsrestriktionen« eingeführt werden. Diese Behauptung ist nicht korrekt. Durch die zusätzlichen unbekannten Parameter, die in das Gauß-Helmert-Modell eingeführt werden dürfen, bringt man lediglich das Gauß-Helmert-Modell in die Form des Gauß-Markoff-Modells. Zum Beweis wird im Folgenden analytisch am Beispiel der räumlichen Helmert-Transformation gezeigt, dass im Gauß-Helmert-Modell und nach Überführung in das Gauß-Markoff-Modell identische Transformationsergebnisse erhalten werden. Außerdem wird aufgrund der Eigenschaft der Methode der kleinsten Quadrate die Unabhängigkeit der Helmert-Transformation von der Transformationsrichtung gezeigt. Ein analytischer Beweis für die Unabhängigkeit ist aus der jüngst vorgelegten analytischen Lösung der Siebenparameter-Transformation von Awange und Grafarend (2002) zu entnehmen. Ganz entsprechend kann man auch bei anderen Transformationen und bei der Geradenausgleichung vorgehen, so dass Reinking (2001) auf völlig korrekte Weise mit der Methode der kleinsten Quadrate die Ergebnisse von Lenzmann und Lenzmann (2001b) erhalten hat.

2 Räumliche Helmert-Transformation

Die räumliche Helmert-Transformation, die eine orthogonale Transformation darstellt und als Spezialfälle die Siebenparameter-Transformation sowie die ebene Helmert-Transformation einschließt, ist wie folgt definiert: Enthält der Vektor $\boldsymbol{x}_{si}$ die dreidimensionalen Koordinaten des Startsystems eines Punktes i und der Vektor $\boldsymbol{x}_{zi}$ die Koordinaten des Zielsystems desselben Punktes i, ergibt sich die räumliche Helmert-Transformation der Koordinaten des Punktes i zu, siehe zum Beispiel Schmid und Heggli (1978) oder Koch (1999, S. 42)

$$\boldsymbol{t} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_{si} = \boldsymbol{x}_{zi} \quad \text{für} \quad i \in \{1, \ldots, p\} \tag{2.1}$$

mit

$$\boldsymbol{t} = \begin{vmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{vmatrix}, \ \boldsymbol{M} = \begin{vmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & m_z \end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_{si} = \begin{vmatrix} x_{si} \\ y_{si} \\ z_{si} \end{vmatrix}, \ \boldsymbol{x}_{zi} = \begin{vmatrix} x_{zi} \\ y_{zi} \\ z_{zi} \end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_3(\gamma)\boldsymbol{R}_2(\beta)\boldsymbol{R}_1(\alpha). \tag{2.2}$$

Hierin bedeutet p die Anzahl der zu transformierenden Punkte, $\boldsymbol{t}$ den Vektor der unbekannten Translationsparameter t_x, t_y, t_z, $\boldsymbol{M}$ die Matrix der unbekannten Maßstabsparameter m_x, m_y, m_z und $\boldsymbol{R}$ die Drehmatrix, die sich aus der Drehung $\boldsymbol{R}_3(\gamma)$ in der x_1, x_2-Ebene um den unbekannten Winkel γ, aus der Drehung $\boldsymbol{R}_2(\beta)$ in der x_1, x_3-Ebene um den unbekannten Winkel β und aus der Drehung $\boldsymbol{R}_1(\alpha)$ in der x_2, x_3-Ebene um den unbekannten Winkel α ergibt. Die dreidimensionale Transformation (2.1) beinhaltet also neun unbekannte Parameter. Setzt man $m_x = m_y = m_z = m$, ergibt sich die Siebenparameter-Transformation.

Sowohl die Koordinaten des Startsystems als auch die Koordinaten des Zielsystems seien Zufallsvariable, also Ergebnisse von Messungen oder von Schätzungen. Ihre Kovarianzmatrizen seien durch die Gewichtsmatrix $\boldsymbol{P}_s$ der Koordinaten des Startsystems und durch die Gewichtsmatrix $\boldsymbol{P}_z$ der Koordinaten des Zielsystems sowie durch den Varianzfaktor σ^2 gegeben

$$D(\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_{s1} \\ \boldsymbol{x}_{s2} \\ \ldots \\ \boldsymbol{x}_{sp} \end{vmatrix}) = \sigma^2 \boldsymbol{P}_s^{-1}, \ D(\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_{z1} \\ \boldsymbol{x}_{z2} \\ \ldots \\ \boldsymbol{x}_{zp} \end{vmatrix}) = \sigma^2 \boldsymbol{P}_z^{-1}. \tag{2.3}$$

Die Koordinaten des Startsystems seien unabhängig von denen des Zielsystems.

Existieren Koordinaten $\boldsymbol{x}_{si}$ und $\boldsymbol{x}_{zi}$, die bei gegebenen Transformationsparametern die Helmert-Transformation (2.1) erfüllen, so ist die Transformation unabhängig von der Transformationsrichtung wegen

$$\boldsymbol{x}_{si} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{R}'\boldsymbol{x}_{zi} - \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{R}'\boldsymbol{t} \quad \text{für} \quad i \in \{1, \ldots, p\}, \tag{2.4}$$

da $\boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{R}$ reguläre Matrizen sind und $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}'$ gilt.

3 Parameterschätzung im Gauß-Helmert-Modell

Wie in der Einleitung erwähnt, werden die neun unbekannten Parameter der räumlichen Helmert-Transformation (2.1) zunächst im Gauß-Helmert-Modell geschätzt. Zur besseren Übersicht wird die Parameterschätzung in diesem Modell noch einmal vorgeführt. Es ist dadurch gekennzeichnet, dass allgemeine nichtlineare Beziehungen zwischen den Beobachtungen und den unbekannten Parametern bestehen, siehe zum Beispiel Wolf (1968, S. 132),

$$h_i(y_1+e_1,\ldots,y_n+e_n,\beta_1,\ldots,\beta_u)=0 \quad i\in\{1,\ldots,r\}\,, \tag{3.1}$$

in denen h_i allgemeine, differenzierbare Funktionen bezeichnen, y_j mit $j\in\{1,\ldots,n\}$ die Beobachtungen, e_j ihre Fehler und β_k mit $k\in\{1,\ldots,u\}$ die unbekannten Parameter.

Zur Linearisierung von (3.1) werden die perfekten oder »wahren« Beobachtungen $\bar{y}_j$ definiert durch

$$\begin{aligned}&\bar{y}_j=y_j+e_j\,,\quad j\in\{1,\ldots,n\}\\ &\text{mit}\quad \bar{y}_j=E(y_j)\quad\text{und}\quad E(e_j)=0\,.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Näherungswerte $\bar{y}_{j0}$ für $\bar{y}_j$ seien gegeben, so dass mit den Korrektionen $\bar{e}_j$ der Näherungswerte gilt

$$\bar{y}_j=\bar{y}_{j0}+\bar{e}_j\,,\quad j\in\{1,\ldots,n\}\,. \tag{3.3}$$

Für die unbekannten Parameter β_k seien die Näherungswerte β_{k0} bekannt, so dass man mit ihren Korrektionen $\Delta\beta_k$ erhält,

$$\beta_k=\beta_{k0}+\Delta\beta_k\,,\quad k\in\{1,\ldots,u\}\,. \tag{3.4}$$

Mit der Taylor-Entwicklung für (3.1) an der Stelle der Näherungswerte wird linearisiert. Mit Abbruch nach dem linearen Glied erhält man

$$\begin{aligned}&h_i(\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_n,\beta_1,\ldots,\beta_u)\\ &=h_i(\bar{y}_{10},\ldots,\bar{y}_{n0},\beta_{10},\ldots,\beta_{u0})\\ &+\frac{\partial h_i}{\partial \bar{y}_1}\Big|_0\bar{e}_1+\ldots+\frac{\partial h_i}{\partial \bar{y}_n}\Big|_0\bar{e}_n\\ &+\frac{\partial h_i}{\partial \beta_1}\Big|_0\Delta\beta_1+\ldots+\frac{\partial h_i}{\partial \beta_u}\Big|_0\Delta\beta_u.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Die Differentialquotienten in (3.5) seien wie folgt bezeichnet

$$\frac{\partial h_i}{\partial \beta_k}\Big|_0=x_{ik}\quad\text{und}\quad \frac{\partial h_i}{\partial \bar{y}_j}\Big|_0=z_{ij} \tag{3.6}$$

und in den Matrizen $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{Z}$ zusammengefasst

$$\boldsymbol{X}=(x_{ik})\quad\text{und}\quad \boldsymbol{Z}=(z_{ij})\,. \tag{3.7}$$

Mit den Vektoren

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{vmatrix}\Delta\beta_1\\ \ldots\\ \Delta\beta_u\end{vmatrix},\ \bar{\boldsymbol{e}}=\begin{vmatrix}\bar{e}_1\\ \ldots\\ \bar{e}_n\end{vmatrix},\quad \bar{\boldsymbol{w}}=\begin{vmatrix}h_1(\bar{y}_{10},\ldots,\bar{y}_{n0},\beta_{10},\ldots,\beta_{u0}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ h_r(\bar{y}_{10},\ldots,\bar{y}_{n0},\beta_{10},\ldots,\beta_{u0}\end{vmatrix} \tag{3.8}$$

ergibt sich anstelle von (3.1) das linearisierte Modell

$$\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{Z}\bar{\boldsymbol{e}}+\bar{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{0}\,. \tag{3.9}$$

Die Kovarianzmatrix des Beobachtungsvektors $\boldsymbol{y}$ mit $\boldsymbol{y}=(y_j)$ und $j\in\{1,\ldots,n\}$ sei durch

$$D(\boldsymbol{y})=\sigma^2\boldsymbol{\Sigma} \tag{3.10}$$

gegeben, worin σ^2 den Varianzfaktor bezeichne und $\boldsymbol{\Sigma}$ eine positiv definite Matrix sei. Die Methode der kleinsten Quadrate fordert, dass mit $\bar{\boldsymbol{y}}=(\bar{y}_j)$, $\boldsymbol{e}=(e_j)$ und mit $\bar{\boldsymbol{y}}=E(\boldsymbol{y})$ aus (3.2) die gewogene Quadratsumme der Fehler

$$\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{e}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{e} \tag{3.11}$$

minimal wird, siehe zum Beispiel Koch (1999, S. 152), wobei die Bedingung gilt, dass das Modell (3.9) erfüllt werde. In (3.9) muss daher der Fehlervektor $\bar{\boldsymbol{e}}$ durch den Fehlervektor $\boldsymbol{e}$ in (3.11) ersetzt werden. Mit $\bar{\boldsymbol{y}}_0=(y_{j0})$ erhält man aus (3.3)

$$\bar{\boldsymbol{e}}=\bar{\boldsymbol{y}}-\bar{\boldsymbol{y}}_0=\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}-\bar{\boldsymbol{y}}_0 \tag{3.12}$$

und damit aus (3.2)

$$\bar{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{e}+\boldsymbol{y}-\bar{\boldsymbol{y}}_0 \tag{3.13}$$

und schließlich anstelle von (3.9)

$$\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{Ze}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0} \tag{3.14}$$

mit

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{y}-\bar{\boldsymbol{y}}_0)+\bar{\boldsymbol{w}}\,. \tag{3.15}$$

Durch eine Taylor-Entwicklung erhält man hierfür auch $w_i=h_i(y_1,\ldots,y_n,\beta_{10},\ldots,\beta_{u0})$. Die quadratische Form (3.11) ist unter der Restriktion (3.14) zu minimieren. Es wird daher die Lagrangesche Funktion

$$w(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{e})=\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{e}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{e}-\frac{2}{\sigma^2}\boldsymbol{k}'(\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{Ze}+\boldsymbol{w}) \tag{3.16}$$

eingeführt, in der $-2\boldsymbol{k}/\sigma^2$ den Vektor der Lagrangeschen Multiplikatoren bezeichnet. Die Ableitungen der Lagrangeschen Funktion nach $\boldsymbol{\beta}$ und $\boldsymbol{e}$ zu Null gesetzt

$$\frac{\partial w(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{e})}{\partial\boldsymbol{\beta}}=-\frac{2}{\sigma^2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0} \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial w(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{e})}{\partial\boldsymbol{e}}=\frac{2}{\sigma^2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{e}-\frac{2}{\sigma^2}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0} \tag{3.18}$$

ergeben aus (3.18) die Schätzung $\hat{\boldsymbol{e}}$ von $\boldsymbol{e}$, also die Residuen zu

$$\hat{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{\Sigma Z}'\boldsymbol{k}\,. \tag{3.19}$$

Dieses Ergebnis in (3.14) eingesetzt, führt zusammen mit (3.17) auf das Normalgleichungssystem für die Schätzung $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ der unbekannten Parameter $\boldsymbol{\beta}$ und für die Schätzung von $\boldsymbol{k}$

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{Z\Sigma Z}' & \boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{X}' & \boldsymbol{0}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\boldsymbol{k}\\ \hat{\boldsymbol{\beta}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{0}\end{vmatrix}. \tag{3.20}$$

Die Matrix $\boldsymbol{Z}$ besitze vollen Zeilenrang, so dass $\boldsymbol{Z\Sigma Z}'$ positiv definit ist. Ausserdem besitze $\boldsymbol{X}$ vollen Spaltenrang. Die Elimination von $\boldsymbol{k}$ aus (3.20) ergibt dann die bekannte Schätzung $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ der Parameter $\boldsymbol{\beta}$ im Gauß-Helmert-Modell

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = -(\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{Z\Sigma Z}')^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{Z\Sigma Z}')^{-1}\boldsymbol{w} \,. \tag{3.21}$$

Für den Vektor $\boldsymbol{k}$ erhält man aus (3.20)

$$\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{Z\Sigma Z}')^{-1}(-\boldsymbol{w} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \,, \tag{3.22}$$

so dass der Vektor $\hat{\boldsymbol{e}}$ der Residuen sich aus (3.19) bekanntlich zu

$$\hat{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{\Sigma Z}'(\boldsymbol{Z\Sigma Z}')^{-1}(-\boldsymbol{w} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \tag{3.23}$$

ergibt. Die Beziehungen zwischen dem Gauß-Markoff-Modell und dem gemischten Modell sind bei (Koch 2000a, S. 49) angegeben.

Um die neun unbekannten Parameter der räumlichen Helmert-Transformation (2.1) im Gauß-Helmert-Modell (3.1) zu schätzen, wird (2.1) entsprechend (3.1) dargestellt durch

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{h}_i = \boldsymbol{t} + \boldsymbol{RM}(\boldsymbol{x}_{si} + \boldsymbol{e}_{si}) - (\boldsymbol{x}_{zi} + \boldsymbol{e}_{zi}) = \boldsymbol{0}\\ &\text{für} \quad i \in \{1, \dots, p\} \,,\end{aligned} \tag{3.24}$$

worin $\boldsymbol{e}_{si}$ die Fehler der räumlichen Koordinaten des Punktes i im Startsystem und $\boldsymbol{e}_{zi}$ die Fehler im Zielsystem bedeuten. Entsprechend (3.2) und (3.3) gelte

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{si} = \boldsymbol{x}_{si} + \boldsymbol{e}_{si} = \bar{\boldsymbol{x}}_{si0} + \bar{\boldsymbol{e}}_{si} \tag{3.25}$$

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{zi} = \boldsymbol{x}_{zi} + \boldsymbol{e}_{zi} = \bar{\boldsymbol{x}}_{zi0} + \bar{\boldsymbol{e}}_{zi} \,, \tag{3.26}$$

wobei $\bar{\boldsymbol{x}}_{si0}$ und $\bar{\boldsymbol{x}}_{zi0}$ die Näherungswerte der »wahren« Koordinaten $\bar{\boldsymbol{x}}_{si}$ und $\bar{\boldsymbol{x}}_{zi}$ des Start- und Zielsystems und $\bar{\boldsymbol{e}}_{si}$ sowie $\bar{\boldsymbol{e}}_{zi}$ ihre Korrektionen bedeuten. Entsprechend (3.4) seien für die unbekannten Transformationsparameter Näherungswerte gegeben, folglich

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_0 + \boldsymbol{\Delta t} \,, \ \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\Delta\alpha} \,, \ \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_0 + \boldsymbol{\Delta m} \tag{3.27}$$

mit

$$\boldsymbol{\alpha} = |\alpha, \beta, \gamma|' \quad \text{und} \quad \boldsymbol{m} = |m_x, m_y, m_z|' \,. \tag{3.28}$$

Für die Linearisierung von (3.24) entsprechend (3.5) werden die Differentialquotienten gebildet

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial \boldsymbol{h}_i}{\partial \boldsymbol{t}}\right|_0 = \boldsymbol{I} \,, \ \left.\frac{\partial \boldsymbol{h}_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right|_0 = \boldsymbol{B}_i \,, \ \left.\frac{\partial \boldsymbol{h}_i}{\partial \boldsymbol{m}}\right|_0 = \boldsymbol{C}_i\\ &\left.\frac{\partial \boldsymbol{h}_i}{\partial \bar{\boldsymbol{x}}_{si}}\right|_0 = \boldsymbol{R}_0\boldsymbol{M}_0 \,, \ \left.\frac{\partial \boldsymbol{h}_i}{\partial \bar{\boldsymbol{x}}_{zi}}\right|_0 = -\boldsymbol{I} \,,\end{aligned} \tag{3.29}$$

worin $\boldsymbol{R}_0$ und $\boldsymbol{M}_0$ die mit den Näherungswerten der Transformationsparameter berechneten Matrizen $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{M}$ bedeuten. Fasst man zusammen durch

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}_i = |\boldsymbol{I}, \boldsymbol{B}_i, \boldsymbol{C}_i|\\
&\boldsymbol{X} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{X}_p \end{vmatrix} , \ \boldsymbol{\beta} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\Delta t} \\ \boldsymbol{\Delta\alpha} \\ \boldsymbol{\Delta m} \end{vmatrix} ,\\
&\boldsymbol{Z} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{R}_0\boldsymbol{M}_0 & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}_0\boldsymbol{M}_0 & \dots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{R}_0\boldsymbol{M}_0 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & -\boldsymbol{I} \end{vmatrix}\\
&\boldsymbol{e} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_{s1} \\ \dots \\ \boldsymbol{e}_{sp} \\ \boldsymbol{e}_{z1} \\ \dots \\ \boldsymbol{e}_{zp} \end{vmatrix} , \ \boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{w}_1 \\ \boldsymbol{w}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{w}_p \end{vmatrix}\\
&\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{R}_0\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{x}_{si} - \bar{\boldsymbol{x}}_{si0}) - (\boldsymbol{x}_{zi} - \bar{\boldsymbol{x}}_{zi0})\\
&+\boldsymbol{t}_0 + \boldsymbol{R}_0\boldsymbol{M}_0\bar{\boldsymbol{x}}_{si0} - \bar{\boldsymbol{x}}_{zi0}\\
&\quad = \boldsymbol{t}_0 + \boldsymbol{R}_0\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{x}_{si} - \boldsymbol{x}_{zi} = -\boldsymbol{y}_{zi} \,,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

erhält man das linearisierte Gauß-Helmert-Modell (3.14) für die Helmert-Transformation der p Punkte mit $\boldsymbol{y}_z = (\boldsymbol{y}_{zi})$ zu

$$\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{Ze} - \boldsymbol{y}_z = \boldsymbol{0} \,. \tag{3.31}$$

Die Kovarianzmatrix $\sigma^2\boldsymbol{\Sigma}$ in (3.10) der Beobachtungen $\boldsymbol{x}_{si}$ und $\boldsymbol{x}_{zi}$ erhält man wegen (2.3) mit

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{P}_s^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_z^{-1} \end{vmatrix} . \tag{3.32}$$

Setzt man in (3.30)

$$\boldsymbol{Z} = |\boldsymbol{W}, -\boldsymbol{I}| \,, \tag{3.33}$$

ergibt sich $\boldsymbol{Z\Sigma Z}'$ in (3.20) zu

$$\boldsymbol{Z\Sigma Z}' = \boldsymbol{WP}_s^{-1}\boldsymbol{W}' + \boldsymbol{P}_z^{-1} \,. \tag{3.34}$$

Mit diesem Ergebnis und mit (3.31) folgt die Schätzung $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ der unbekannten Transformationsparameter $\boldsymbol{\beta}$ nach (3.21) zu

$$\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{WP}_s^{-1}\boldsymbol{W}' + \boldsymbol{P}_z^{-1})^{-1}\boldsymbol{X})^{-1} \times\\ &\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{WP}_s^{-1}\boldsymbol{W}' + \boldsymbol{P}_z^{-1})^{-1}\boldsymbol{y}_z \,.\end{aligned} \tag{3.35}$$

Zum Vergleich mit dem Schätzergebnis des Gauß-Markoff-Modells, das im übernächsten Abschnitt abzuleiten ist, wird die Inverse von $\boldsymbol{WP}_s^{-1}\boldsymbol{W}' + \boldsymbol{P}_z^{-1}$ durch eine Identität umgeformt (Koch 2000b, S. 106), und man erhält

$$\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{\beta}} =\\ &(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{W}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{W} + \boldsymbol{P}_s)^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{X})^{-1} \times\\ &(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{y}_z - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{W}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{W} + \boldsymbol{P}_s)^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{y}_z).\end{aligned} \tag{3.36}$$

Mit den Residuen $\hat{\boldsymbol{e}}_s = (\hat{\boldsymbol{e}}_{si})$ und $\hat{\boldsymbol{e}}_z = (\hat{\boldsymbol{e}}_{zi})$, den Schätzwerten der Fehler $\boldsymbol{e}_{si}$ und $\boldsymbol{e}_{zi}$ in (3.25) und (3.26), folgt der Vektor $\hat{\boldsymbol{e}}$ der Residuen aus (3.23) und (3.31) bis (3.35) zu

$$\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{e}} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_s \\ \hat{\boldsymbol{e}}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{P}_s^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_z^{-1} \end{vmatrix} \times\\ &\begin{vmatrix} \boldsymbol{W}' \\ -\boldsymbol{I} \end{vmatrix} (\boldsymbol{WP}_s^{-1}\boldsymbol{W}' + \boldsymbol{P}_z^{-1})^{-1}(\boldsymbol{y}_z - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})\end{aligned} \tag{3.37}$$

oder

$$\hat{e}_s = P_s^{-1} W' (W P_s^{-1} W' + P_z^{-1})^{-1} (y_z - X\hat{\beta}) \quad (3.38)$$

$$\hat{e}_z = -P_z^{-1} (W P_s^{-1} W' + P_z^{-1})^{-1} (y_z - X\hat{\beta}) \; . \quad (3.39)$$

Mit einer weiteren Matrizenidentität wird (3.38) umgeformt (Koch 2000a, S. 106) und (3.39) mit der Identität, die auf (3.36) führt, so dass schließlich erhalten wird

$$\hat{e}_s = (W' P_z W + P_s)^{-1} W' P_z (y_z - X\hat{\beta}) \quad (3.40)$$

$$\hat{e}_z = (-I + W(W' P_z W + P_s)^{-1} W' P_z) \times (y_z - X\hat{\beta}). \quad (3.41)$$

Die Schätzwerte $\hat{\beta}$ der unbekannten neun Transformationsparameter β folgen somit aus (3.35) oder (3.36) und die Residuen $\hat{e}_s$ der Koordinaten des Startsystems aus (3.38) oder (3.40) und die Residuen $\hat{e}_z$ der Koordinaten des Zielsystems aus (3.39) oder (3.41).

4 Unabhängigkeit von der Transformationsrichtung

Die Schätzwerte $\hat{\beta}$ der Transformationsparameter und damit auch die Residuen $\hat{e}_s$ und $\hat{e}_z$ sind wegen (3.27) abhängig von den Näherungswerten für die Parameter. Es muss daher iteriert werden. Für $\hat{\beta}, \hat{e}_s$ und $\hat{e}_z$ folgt aus (3.40) und (3.41)

$$\hat{e}_z = X\hat{\beta} - y_z + W\hat{e}_s \quad (4.1)$$

oder für den Punkt i mit (3.30) und (3.33)

$$\hat{e}_{zi} = X_i\hat{\beta} + t_0 + R_0 M_0 x_{si} - x_{zi} + R_0 M_0 \hat{e}_{si} \; . \quad (4.2)$$

Seien $(\hat{\beta})_k, (\hat{e}_{zi})_k$ und $(\hat{e}_{si})_k$ die Schätzwerte und Residuen in der Iteration k sowie $(t_0)_k$ und $(R_0 M_0)_k$ die mit den Näherungswerten der Transformationsparameter für die Iteration k berechneten Größen. Man erhält dann anstelle von (4.2)

$$X_i(\hat{\beta})_k + (t_0)_k + (R_0 M_0)_k (x_{si} + (\hat{e}_{si})_k) = x_{zi} + (\hat{e}_{zi})_k. \quad (4.3)$$

Konvergenz des Iterationsverfahrens vorausgesetzt, gehen im Konvergenzpunkt mit $k \rightarrow \infty$ die Schätzwerte gegen Null

$$(\hat{\beta})_k \rightarrow 0 \quad (4.4)$$

und die Abhängigkeit von den Näherungswerten verschwindet, so dass aus (4.3) folgt

$$\hat{t} + \hat{R}\hat{M}(x_{si} + \hat{e}_{si}) = x_{zi} + \hat{e}_{zi} \; , \quad (4.5)$$

worin $\hat{t}, \hat{R}$ und $\hat{M}$ mit den Schätzwerten der Transformationsparameter berechnet werden.

Aufgrund der Forderung (3.11) der Methode der kleinsten Quadrate werden die Residuen $\hat{e}_s$ und $\hat{e}_z$ im Konvergenzpunkt derart bestimmt, dass wegen (3.32)

$$\hat{e}_s' P_s \hat{e}_s + \hat{e}_z' P_z \hat{e}_z \rightarrow \min \quad (4.6)$$

gilt. Ist $P_s = P_z = I$, werden die Summen der Quadrate der Abstände der durch x_{si} und x_{zi} bestimmten Punkte von den Punkten $x_{si} + \hat{e}_{si}$ und $x_{zi} + \hat{e}_{zi}$ minimiert, die nach (4.5) wegen (2.1) die Helmert-Transformation erfüllen. Es werden also die kürzesten Abstände gebildet, so dass $x_{si} + \hat{e}_{si}$ und $x_{zi} + \hat{e}_{zi}$ die Lotfußpunkte von x_{si} und x_{zi} sind. Die kürzesten Abstände sind unabhängig von der Transformationsrichtung. Entsprechend (2.4) ist daher im Konvergenzpunkt der Iterationen die durch die Methode der kleinsten Quadrate bestimmte Helmert-Transformation (4.5) unabhängig von der Transformationsrichtung. Ist $P_s = P_z = P$, gilt das Gleiche für die durch die Gewichtsmatrix P verallgemeinerten kürzesten Abstände.

5 Parameterschätzung im Gauß-Markoff-Modell

Die Koordinaten $\bar{x}_{si}$ in (3.25) des Punktes i im Startsystem werden entsprechend (3.2) als »wahre« Beobachtungen interpretiert. Man kann sie im Gauß-Helmert-Modell (3.24) aber auch als unbekannte Parameter ansehen, muss dann aber ihre Definition (3.25) als zusätzliche Beobachtungsgleichung einführen. Man erhält nun anstelle des Gauß-Helmert-Modells (3.24) das Gauß-Markoff-Modell durch (Koch et al. 2000)

$$\begin{aligned} t + RM\bar{x}_{si} &= x_{zi} + e_{zi} \\ \bar{x}_{si} &= x_{si} + e_{si} \quad \text{für} \quad i \in \{1, \ldots, p\} \; . \end{aligned} \quad (5.1)$$

Das Gauß-Helmert-Modell (3.24) und das Gauß-Markoff-Modell (5.1) sind äquivalent. In beiden Modellen ergeben sich identische Parameterschätzungen und Residuen. Um das zu zeigen, wird zunächst linearisiert. Mit (3.27) werden die Näherungswerte für die neun unbekannten Transformationsparameter eingeführt und entsprechend (3.25) mit

$$\bar{x}_{si} = \bar{x}_{si0} + \Delta x_{si} \quad (5.2)$$

die Näherungswerte $\bar{x}_{si0}$ von $\bar{x}_{si}$ und die unbekannten Korrektionen Δx_{si}. Mit den Differentialquotienten entsprechend (3.29)

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial x_{zi}}{\partial t}\right|_0 = I \; , \; \left.\frac{\partial x_{zi}}{\partial \alpha}\right|_0 = B_i \; , \; \left.\frac{\partial x_{zi}}{\partial m}\right|_0 = C_i \; , \\ &\left.\frac{\partial x_{zi}}{\partial \bar{x}_{si}}\right|_0 = R_0 M_0 \; , \; \left.\frac{\partial x_{si}}{\partial t}\right|_0 = 0 \; , \; \left.\frac{\partial x_{si}}{\partial \alpha}\right|_0 = 0 \; , \\ &\left.\frac{\partial x_{si}}{\partial m}\right|_0 = 0 \; , \; \left.\frac{\partial x_{si}}{\partial \bar{x}_{si}}\right|_0 = I \end{aligned} \quad (5.3)$$

ergibt sich das linearisierte Modell mit (3.30) zu

$$\begin{aligned} R_0 M_0 \Delta x_{si} + X_i \beta &= y_{zi} + e_{zi} \\ I \Delta x_{si} &= y_{si} + e_{si} \end{aligned} \quad (5.4)$$

mit den Beobachtungen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_{zi} &= \boldsymbol{x}_{zi} - \boldsymbol{t}_0 - \boldsymbol{R}_0\boldsymbol{M}_0\bar{\boldsymbol{x}}_{si0} \\ \boldsymbol{y}_{si} &= \boldsymbol{x}_{si} - \bar{\boldsymbol{x}}_{si0} \; . \end{aligned} \qquad (5.5)$$

Mit $\boldsymbol{\Delta x}_s = (\boldsymbol{\Delta x}_{si})$, $\boldsymbol{y}_z = (\boldsymbol{y}_{zi})$, $\boldsymbol{y}_s = (\boldsymbol{y}_{si})$, $\boldsymbol{e}_z = (\boldsymbol{e}_{zi})$, $\boldsymbol{e}_s = (\boldsymbol{e}_{si})$, der Matrix $\boldsymbol{W}$ aus (3.33) und der Kovarianzmatrix der Beobachtungen aus (2.3) folgen die Beobachtungsgleichungen für sämtliche p zu transformierenden Punkte mit

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{W} & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\Delta x}_s \\ \boldsymbol{\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{y}_z + \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{y}_s + \boldsymbol{e}_s \end{vmatrix}$$

$$\text{und} \quad D(\begin{vmatrix} \boldsymbol{y}_z \\ \boldsymbol{y}_s \end{vmatrix}) = \sigma^2 \begin{vmatrix} \boldsymbol{P}_z^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_s^{-1} \end{vmatrix} . \qquad (5.6)$$

Die Schätzwerte $\boldsymbol{\Delta}\hat{\boldsymbol{x}}_s$ und $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ der unbekannten Parameter $\boldsymbol{\Delta x}_s$ und $\boldsymbol{\beta}$ erhält man bekanntlich mit

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{\Delta}\hat{\boldsymbol{x}}_s \\ \hat{\boldsymbol{\beta}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{W}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{W} + \boldsymbol{P}_s & \boldsymbol{W}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{W} & \boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{X} \end{vmatrix}^{-1} \times \begin{vmatrix} \boldsymbol{W}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{y}_z + \boldsymbol{P}_s\boldsymbol{y}_s \\ \boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{y}_z \end{vmatrix} . \qquad (5.7)$$

Die Schätzwerte sind abhängig von den Näherungswerten, so dass iteriert werden muss. Der Vektor $\bar{\boldsymbol{x}}_{si}$ tritt in der Helmert-Transformation (5.1) linear auf, falls die Transformationsparameter gegeben sind. Es kann daher ein beliebiger Näherungswert $\bar{\boldsymbol{x}}_{si0}$ in (5.2) gewählt werden, wobei allerdings die Matrizen $\boldsymbol{X}_i$ mit den jeweiligen Schätzwerten für $\bar{\boldsymbol{x}}_{si}$ zu berechnen sind. Es wird

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{si0} = \boldsymbol{x}_{si} \qquad (5.8)$$

gesetzt, so dass aus (5.4) und (5.5) folgt

$$\boldsymbol{y}_s = \boldsymbol{0} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Delta}\hat{\boldsymbol{x}}_s = \hat{\boldsymbol{e}}_s \; . \qquad (5.9)$$

Mit dieser Substitution und der Inversen einer Blockmatrix, siehe zum Beispiel Koch (1999, S. 33), ergeben sich die Schätzwerte $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ der Transformationsparameter zu

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{W}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{W} + \boldsymbol{P}_s)^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{X})^{-1} \times (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{y}_z - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{W}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{W} + \boldsymbol{P}_s)^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{y}_z) \; . \qquad (5.10)$$

Die Residuen $\hat{\boldsymbol{e}}_s$ der Koordinaten des Startsystems folgen mit (5.9) durch Substitution von $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ in dem (5.7) entsprechenden Normalgleichungssystem aus

$$\hat{\boldsymbol{e}}_s = (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{W} + \boldsymbol{P}_s)^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{P}_z(\boldsymbol{y}_z - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \; . \qquad (5.11)$$

Die Residuen $\hat{\boldsymbol{e}}_z$ der Koordinaten des Zielsystems ergeben sich schließlich aus (5.6) mit (5.9) und (5.11) zu

$$\hat{\boldsymbol{e}}_z = (-\boldsymbol{I} + \boldsymbol{W}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{P}_z\boldsymbol{W} + \boldsymbol{P}_s)^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{P}_z) \times (\boldsymbol{y}_z - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \; . \qquad (5.12)$$

Die hier im Gauß-Markoff-Modell erhaltenen Schätzwerte $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ aus (5.10) und die Residuen $\hat{\boldsymbol{e}}_s$ und $\hat{\boldsymbol{e}}_z$ aus (5.11) und (5.12) stimmen mit den im Gauß-Helmert-Modell gewonnenen Ergebnissen (3.36), (3.40) und (3.41) überein.

6 Schlussfolgerungen

Werden mit der Methode der kleinsten Quadrate die unbekannten Parameter von Koordinatentransformationen, zum Beispiel der räumlichen Helmert-Transformation geschätzt, sind die Ergebnisse unabhängig von der Transformationsrichtung, sofern die Koordinaten des Start- und des Zielsystems als Zufallsvariable mit identischen Kovarianzmatrizen behandelt werden. Die Auswertungen können im Gauß-Helmert-Modell oder nach Einführung zusätzlicher unbekannter Parameter im Gauß-Markoff-Modell erfolgen, die Ergebnisse sind identisch. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, kann nämlich die Beweisführung, die hier am Beispiel der räumlichen Helmert-Transformation vorgenommen wurde, auf beliebige Transformationen, die umkehrbar sind, übertragen werden.

Literatur

Awange, J.L. and Grafarend, E.W.: Closed form solution of the nonlinear 7 parameter datum transformation by Groebner basis. J Geodesy, in Vorbereitung, 2002.

Helfrich, H.-P. and Zwick, D.: A trust region method for implicit orthogonal distance regression. Numerical Algorithms, 5, S. 535–545, 1993.

Helfrich, H.-P. and Zwick, D.: Trust region algorithms for the nonlinear least distance problem. Numerical Algorithms, 9, S. 171–179, 1995.

Helfrich, H.-P. and Zwick, D.: A trust region algorithm for parametric curve and surface fitting. J Computational and Applied Mathematics, 73, S. 119–134, 1996.

Koch, K.R.: Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models. Springer, Berlin, 1999.

Koch, K.R.: Beispiele zur Parameterschätzung, zur Festlegung von Konfidenzregionen und zur Hypothesenprüfung. Nr. 87. Mitteilungen aus den Geodätischen Instituten der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn, 2000a.

Koch, K.R.: Einführung in die Bayes-Statistik. Springer, Berlin, 2000b.

Koch, K.R.: Bemerkungen zu der Veröffentlichung »Zur Bestimmung eindeutiger Transformationsparameter«. zfv, 126, S. 297, 2001.

Koch, K.R., Fröhlich, H. und Bröker, G.: Transformation räumlicher variabler Koordinaten. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, 107, S. 293–295, 2000.

Lenzmann, E. und Lenzmann, L.: Erwiderung auf die Anmerkung von Jörg Reinking und die Bemerkungen von Karl-Rudolf Koch zu unserem Beitrag »Zur Bestimmung eindeutiger Transformationsparameter«. zfv, 126, S. 298–299, 2001a.

Lenzmann, E. und Lenzmann, L.: Zur Bestimmung eindeutiger Transformationsparameter. zfv, 126, S. 138–142, 2001b.

Lenzmann, L.: Zur Bestimmung der Transformationsparameter nach der Methode der kleinsten Quadrate. zfv, 126, S. 361–365 , 2001.

Reinking, R.: Anmerkung zu »Zur Bestimmung eindeutiger Transformationsparameter«. zfv, 126, S. 295–296, 2001.

Schmid, H.H. und Heggli, S.: Räumliche Koordinatentransformation. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der ETH, Mitteilungen Nr. 23, Zürich, 1978.

Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Dümmler, Bonn, 1968.

Wolf, H.: Das geodätische Gauß-Helmert-Modell und seine Eigenschaften. zfv, 103, S. 41–43, 1978.

Anschrift des Autors
Karl-Rudolf Koch
Institut für Theoretische Geodäsie
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
Nussallee 17
53115 Bonn