Warum GUM?

Kritische Anmerkungen zur Normdefinition der »Messunsicherheit« und zu verzerrten »Elementarfehlermodellen«

Hubert Schmidt

Zusammenfassung

Dieser Beitrag befasst sich mit den vom Europäischen Komitee für Normung im »Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM)« festgelegten Definitionen zur Messunsicherheit. Es wird gezeigt, dass einige dieser Definitionen zur Anwendung bei geodätischen Messungen nicht empfohlen werden können. Weiterhin wird gezeigt, dass »Elementarfehlermodelle«, bei denen der Einfluss systematischer Messabweichungen bewusst als definierendes Konstruktionselement verwandt wird, auf unkorrekten statistischen Grundlagen basieren.

Summary

This contribution deals with the definitions of uncertainty in measurement, given in the „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM)" of the European Committee for Standardization. It will be shown that some of these definitions cannot be recommended for use in geodetic survey. Furthermore, it will be shown that „elementary error models", which are constructed with the influence of systematic errors, are not correct.

1 Einleitung

Bei Ingenieurvermessungen kommt mit zunehmenden Genauigkeitsanforderungen der zutreffenden Quantifizierung des Genauigkeitsmaßes immer größere Bedeutung zu. Bekanntlich unterliegt die Messgenauigkeit sowohl zufälligen als auch systematischen Einflüssen, die sich unterschiedlich auswirken. Dessen ungeachtet und entgegen den Regeln der mathematischen Statistik wurde im »Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM)« ein Genauigkeitsmaß definiert, welches beide Einflussarten *einheitlich* behandelt und zusamenfasst. In der deutschen Fassung des GUM: »Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen«, der als europäische Vornorm ENV 13005 im DIN übernommen worden ist, wird dieses Genauigkeitsmaß als »Messunsicherheit« bezeichnet. In Heister (2001) und Lang (2001) werden die GUM-Definitionen aus geodätischer Sichtweise erläutert, ihre Umsetzung an praktischen Beispielen demonstriert und zur Anwendung in der geodätischen Messpraxis empfohlen.

In diesem Beitrag soll aufgezeigt werden, dass das im GUM definierte und abgeleitete Genauigkeitsmaß »Messunsicherheit« den in der geodätischen Ausgleichungspraxis anerkannten statistischen Grundregeln widerspricht und daher für die Anwendung in der geodätischen Messpraxis *nicht* empfohlen werden kann, weil systematische Messeinflüsse als zufällige behandelt werden und gleichartig in das Genauigkeitsmaß einfließen. Die Messergebnisse werden dadurch nicht »genauer« im Sinne von »richtiger«. Die Verbesserung der Messergebnisse lässt sich nur durch weitestgehende Eliminierung systematischer Messabweichungen erreichen. Die Schätzwerte der nach GUM definierten Messunsicherheit

- können die wirklichen Genauigkeitsverhältnisse nicht widerspiegeln, da keine separate statistische und metrologische Beurteilung mehr möglich ist.
- lassen sich nicht dazu verwenden, Korrelationsschätzwerte zwischen Messgrößen abzuleiten, da diese grob falsch sein können.
- dürfen nicht dazu benutzt werden, auf Wahrscheinlichkeitsannahmen gründende Konfidenzintervalle anzugeben oder Hypothesentests durchzuführen, da das statistische Genauigkeitsmaß verfälscht ist.

Zur Verdeutlichung der Ausgangslage seien im folgenden Kapitel zunächst die Grundlagen statistischer und metrologischer Genauigkeitsdefinitionen rekapituliert. Aus gegebenem Anlass wird hierbei auch auf »Elementarfehlermodelle« eingegangen.

2 Genauigkeitsdefinitionen der Statistik und der Metrologie

2.1 Komponenten der Genauigkeit

Zur Beurteilung der Genauigkeit einer Messgröße stehen zwei Kriterien zur Verfügung, das statistische Maß »Präzision« und das metrologische Maß »Richtigkeit«, die sich gegenseitig ergänzen, aber nicht zu *einem* statistisch definierten Genauigkeitsmaß zusammengefasst werden können (siehe DIN 55350-13, 1987, Nr. 2.1, Pelzer in: Schwarz (Red.) 1995, Kap. 4.1.2.1, Witte und Schmidt 2002, Kap. 2.10.1).

2.2 Präzision und Elementarfehlermodelle

2.2.1 Präzision

Die nachfolgend rekapitulierten Definitionen lassen sich jedem Lehrbuch der Statistik, z. B. Pelzer (1985, Kap. 1.1.4

bis 1.1.6) entnehmen. Das Maß für die *Präzision* ist die *Standardabweichung* σ. Sie kennzeichnet in der mathematischen Statistik das zufällige Streuen der Messwerte x_i einer als *Zufallsvariable* definierten Messgröße X um deren

$$\textit{Erwartungswert} \quad E(X) = \mu_x\,. \tag{1}$$

Für den Erwartungswert der Zufallsabweichungen $\varepsilon_i = (x_i - \mu_x)$ gilt:

$$E(\varepsilon_x) = E(X - \mu_x) = 0\,. \tag{2}$$

Die *Varianz* σ_x^2 ist als Erwartungswert der quadrierten Zufallsabweichungen das originäre Streuungsmaß der Statistik. Die Standardabweichung σ_x ergibt sich als (positive) Quadratwurzel der Varianz.

$$\begin{aligned} &\textit{Varianz} && \sigma_x^2 = E(\varepsilon_x^2) \;=\; E[(X-\mu_x)^2]. \\ &\textit{Standardabweichung} && \sigma_x = {}_+\sqrt{\sigma_x^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Eine Beziehung zwischen jeweils zwei Zufallsvariablen X und Y lässt sich durch die *Kovarianz* angeben. Die normierte Kovarianz heißt *Korrelationskoeffizient*.

$$\begin{aligned} &\textit{Kovarianz} \\ &\sigma_{xy} = E(\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y) \;=\; E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]. \\ &\textit{Korrelationskoeffizient} \\ &\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \qquad \text{mit} \quad -1 \le \rho_{xy} \le 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Fazit:
Die Streuungsmaße in Gl. (3) und Gl. (4) beziehen sich ausschließlich auf die *Erwartungswerte* und auf die *Zufallsabweichungen* der Zufallsvariablen. Ihrer Natur entsprechend lassen sich die Zufallsabweichungen jedoch einzeln nicht erfassen. Sie können nur in cumulo durch die Varianz bzw. Standardabweichung oder die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten beschrieben werden. Folglich lassen sie sich auch nicht durch die Messanordnung oder durch Korrektionen beeinflussen, insbesondere nicht eliminieren. Korrelationen kennzeichnen den Zusammenhang zwischen *Zufalls*variablen und lassen sich nicht »erzeugen«. Zur Berechnung der Schätzwerte für die Parameter μ, σ^2, σ_{xy} und ρ_{xy} bedient man sich der bekannten Methoden der mathematischen Statistik.

2.2.2 Elementarfehlermodelle

Die Zusammensetzung und Auswirkung der in den Präzisionsmaßen zusammengefassten Zufallsabweichungen wurde von Bessel (1837) und Hagen (1837) durch die *Theorie der Elementarfehler* erklärt. Im *Elementarfehlermodell* von Pelzer (1985, Kap. 1.2.1 und 1.5.2) zeigt sich die Zusammensetzung einer zufälligen Abweichung ε_i in der Form:

$$\varepsilon_i = \sum_{k=1}^{m} f_{ik} \cdot \xi_k \;+\; \sum_{j=1}^{p} d_{ij} \cdot \delta_{ij} \tag{5}$$

ξ_k = *Elementarfehler* im Beobachtungsprozess, die sich nicht nur auf eine, sondern auf mehrere der zufälligen Abweichungen ε_i auswirken; diese Elementarfehler wirken korrelierend.

δ_{ij} = *Elementarfehler*, die sich individuell jeweils nur auf eine einzige Abweichung ε_i auswirken.

f_{ik} = *Einflussfaktoren* der korrelierend wirkenden Elementarfehler.

d_{ij} = *Einflussfaktoren* der nicht korrelierend wirkenden Elementarfehler.

2.3 Richtigkeit

Die *Richtigkeit* eines Messergebnisses wird beeinflusst von der *systematischen Messabweichung* δ, mit der das Messergebniss behaftet sein kann. Bedingt durch die systematische Verfälschung fällt der Erwartungswert der Messgröße nicht mit deren *wahren Wert* $\tilde{X}$ zusammen (Pelzer 1985, Gl. (1-23)):

$$\mu = \tilde{X} + \delta. \tag{6}$$

Der »wahre Wert« ist ein Begriff der Metrologie.

Im Gegensatz zu zufälligen Messabweichungen lassen sich systematische Messabweichungen durch die Messanordnung und -auswertung oder durch die Anbringung von Korrektionen vollständig oder teilweise eliminieren.

- Durch die Berechnung »Rückblick minus Vorblick« wird die (zumeist unbekannte) Nullpunktabweichung einer Nivellierlatte vollständig eliminiert.
- Durch die Horizontalwinkelmessung in zwei Lagen und Mittelbildung lassen sich die Einflüsse der Zielachsabweichung, der Kippachsabweichung, der Teilkreisexzentrizität vollständig und weitere Einflüsse mindestens teilweise eliminieren.
- Durch die Anbringung von Kalibrierkorrektionen lassen sich aus Distanzmesswerten die systematischen Messabweichungen fast vollständig eliminieren.

Bei erhöhten Genauigkeitsanforderungen erfordert die Instrumentenkalibrierung und die Messdurchführung einen entsprechend hohen Aufwand, damit die systematischen Messabweichungen ausreichend eliminiert werden. Mit wachsendem Aufwand lässt sich folglich der Erwartungswert einer Messgröße immer näher an deren wahren Wert »heranschieben«. Nichterkannte systematische Messabweichungen verfälschen das Messmaterial in komplexer Weise, was verzerrte Parameter- und Varianz/Kovarianzschätzwerte zur Folge hat.

2.4 Verzerrte Elementarfehlermodelle und Kovarianzmatrizen

2.4.1 Verzerrte Kovarianz- und Korrelationsschätzungen

Wie in Kap. 2.2.1dargelegt, beziehen sich die Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung der mathematischen Statistik ausschließlich auf Zufallsabweichungen. Bereits in Schmidt (1996) wird die Problematik verzerrter, durch systematische Messabweichungen verursachte Korrelationsschätzungen und die hierzu in der Literatur aufgestellten Thesen zur »Konstruktion von Kovarianzen« untersucht. Darin wird u. a. anhand der Definitionsgleichungen (1) bis (4) nachgewiesen, dass das Elementarfehlermodell von Matthias (1986) und dessen Aussage »Korrelationen haben ihre Ursache immer in der Überlagerung der reinen Zufälligkeit mit systematischen Einflüssen« unkorrekt sind.

Bezogen auf dieses Modell wird in Schwarz ((Red.) 1995, Kap. 2.5.1) und Möser et al. (2000, Tab. 3.2-5) empfohlen, durch bewusste Einbeziehung systematischer Messabweichungen in Varianz/Kovarianzberechnungen Korrelationen von $\rho = \pm 1$ zu »erzeugen«, damit anstelle der Addition von Varianzen und Kovarianzen Standardabweichungen addiert und subtrahiert(!) werden können. Dies wird in Schwarz (1995) mit dem Kovarianzfortpflanzungsgesetz anhand der Summe c und der Differenz d zweier Strecken a und b abgeleitet:

Summe

$$c = a + b \quad ; \quad \sigma_c = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + 2 \cdot \rho_{ab} \cdot \sigma_a \cdot \sigma_b}\,. \tag{7}$$

Differenz

$$d = a - b \quad ; \quad \sigma_d = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2 \cdot \rho_{ab} \cdot \sigma_a \cdot \sigma_b}\,. \tag{8}$$

Für $\rho_{ab} = +1$ bzw. $\rho_{ab} = -1$ werden in Schwarz (1995) die Gl. (7) und Gl. (8) unter Anwendung der binomischen Lehrsätze umgeformt zu:

$$\sigma_c\,(\rho_{ab} = +1) = \sqrt{(\sigma_a + \sigma_b)^2} = \sigma_a + \sigma_b, \tag{9}$$

$$\sigma_d\,(\rho_{ab} = +1) = \sqrt{(\sigma_a - \sigma_b)^2} = \sigma_a - \sigma_b, \tag{10}$$

$$\sigma_c\,(\rho_{ab} = -1) = \sqrt{(\sigma_a - \sigma_b)^2} = \sigma_a - \sigma_b, \tag{11}$$

$$\sigma_d\,(\rho_{ab} = -1) = \sqrt{(\sigma_a + \sigma_b)^2} = \sigma_a + \sigma_b. \tag{12}$$

Hiermit ergäben sich bei $\sigma_a = 2\,cm$ und $\sigma_b = 3\,cm$:

$$\sigma_c\,(\rho_{ab} = +1) = 5\,cm\,, \quad \sigma_d\,(\rho_{ab} = +1) = -1\,cm\ (!)\,,$$
$$\sigma_c\,(\rho_{ab} = -1) = -1\,cm\ (!)\,, \quad \sigma_d\,(\rho_{ab} = -1) = 5\,cm\,,$$

was nichtdefinierte *negative* Standardabweichungen zur Folge hat.

Die Umformung Gl. (9) bis (12) ist nicht zulässig, da sich das Fortpflanzungsgesetz ausschließlich auf Varianzen und Kovarianzen entsprechend Gl. (7) und Gl. (8) und nicht auf Standardabweichungen bezieht. Berechnet man mit den Gl. (7) und Gl. (8) die Standardabweichungen σ_c und σ_d, können die Ergebnisse nicht negativ werden:

$$\sigma_c\,(\rho_{ab} = +1) = 5\,cm\,, \quad \sigma_d\,(\rho_{ab} = +1) = 1\,cm\,,$$
$$\sigma_c\,(\rho_{ab} = -1) = 1\,cm\,, \quad \sigma_d\,(\rho_{ab} = -1) = 5\,cm\,.$$

Fazit:

- Ein »Standardabweichungsfortpflanzungsgesetz« ist nicht definiert.
- Korrelationen beschreiben die Abhängigkeit von *Zufallsvariablen*. Sie sind nach Gl. (1) bis (4) ausschließlich auf Zufallsabweichungen begründet. Niemals lassen sich wirkliche Korrelationen »erzeugen«.

Korrelationsschätzwerte reagieren sehr empfindlich auf systematische Verfälschungen, d. h. es können sich große Korrelationsschätzwerte zwischen Messwerten ergeben, selbst wenn die Messwerte in Wirklichkeit nicht oder nur gering korreliert sind (siehe Schmidt 1996, Tab. 1, Pelzer in: Schwarz (Red.) 1995, Kap. 4.1.2.1). Selbst bei stark korrelierten Zufallsvariablen können sich infolge Verfälschungen durch systematische Messabweichungen Korrelationsschätzwerte mit entgegengesetztem Vorzeichen zeigen, welche den wirklichen Zusammenhang zwischen den Zufallsvariablen völlig konträr wiedergeben. Gelingt es, die systematischen Messabweichungen zu eliminieren, sind die Korrelationsschätzwerte zumeist betragsmäßig wesentlich kleiner.

In Höpcke (1980, Kap. 23.3) ist ein Beispiel zur trigonometrischen Höhenmessung angegeben, bei dem halbstündlich zu zwei unterschiedlich entfernten Zielpunkten jeweils Doppelbeobachtungen durchgeführt wurden. An den Differenzen zwischen den Messwerten und nivellitisch bestimmten Sollwerten ist deutlich erkennbar, dass die Zufallsabweichungen von dem im Tagesverlauf sich verändernden systematischen Refraktionseinfluss überlagert werden. Aus diesen Differenzen berechnet Höpcke den Korrelationsschätzwert $r = 0,87$. Führt man die Berechnung jedoch mit den Differenzen zwischen den nahezu zeitgleich ausgeführten Doppelbeobachtungen der jeweiligen Ziele durch, so dass der systematische Refraktionseinfluss als nahezu ausgeschaltet betrachtet werden kann, reduziert sich der Korrelationsschätzwert auf $r = 0,35$. Mit diesem Wert lässt sich für dieses Beispiel eine signifikante Korrelation zwischen den Messwerten nicht nachweisen.

Es bleibt festzuhalten, dass sich mehr oder weniger verzerrte Kovarianz- und Korrelationsschätzwerte ergeben, wenn in den Restabweichungen mehr oder weniger stark dominierende systematische Messabweichungen enthalten sind. Nachfolgend soll dargestellt werden, dass gegen die statistischen Grundlagen des Kapitels 2.2.1 verstoßen wird, wenn systematische Messabweichungen in die *Definition* der Varianzen und Kovarianzen einbezogen werden.

2.4.2 Elementarfehlermodell von Schwieger

In Schwieger (1999 und 2001) wird ein *erweitertes Elementarfehlermodell* zur »Konstruktion synthetischer Kovarianzmatrizen« vorgestellt. Im Gegensatz zum Elementarfehlermodell von Pelzer (1985), in dem die Auswirkungen auf *Zufalls*abweichungen, durch welche Korrelationen entstehen, nur *beschrieben* werden, erklärt Schwieger nichterfassbare systematische Messabweichungen zu Zufallsabweichungen und bezieht sie in sein Elementarfehlermodell ein, womit er Korrelationen *konstruieren* will. Zufallsabweichungen und ihre Korrelationen lassen sich aber prinzipiell nicht konstruieren.

Schwieger geht von funktional korrelierenden (ξ), nicht korrelierenden (δ) und zusätzlich von stochastisch korrelierenden (γ) *Elementarfehlern* aus:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\xi} + \sum_1^p (\mathbf{D}_k \cdot \boldsymbol{\delta}_k) + \sum_1^q (\mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\gamma}_h). \tag{13}$$

Dieses Elementarfehlermodell kann die Bedingung der Gl. (2) nicht erfüllen, da systematische Messabweichungen enthalten sind und somit

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}) \neq \mathbf{0} \tag{14}$$

gilt. Daher entspricht die von Schwieger angegebene Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_{ll}$ der Beobachtungen

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ll} = \mathbf{F}\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}\,\mathbf{F}^T + \sum_1^p (\sigma_k^2 \cdot \mathbf{D}_k^2) + \sum_1^q (\mathbf{G}\,\boldsymbol{\Sigma}_{hh}\,\mathbf{G}^T) \tag{15}$$

nicht den Definitionsgleichungen (3) und (4), so dass Gl. (15) verzerrte Schätzwerte zur Folge hat.

In Schwieger (1999) wird in Kap. 2.1 argumentiert:

> Die verbleibenden nicht erfaßbaren systematischen Meßabweichungen folgen nach DIN 2257-2 (1974) stochastischen Gesetzmäßigkeiten. …Die nach einer funktionalen Modellierung oder Elimination der systematischen Meßabweichungen verbleibenden nicht erfaßbaren systematischen Meßabweichungen sind als zufällig zu betrachten. Sie werden in der Regel korrelierend wirken.

In DIN 2257-2 heißt es in Nr. 3.1.2:

> Diese nicht erfaßten Fehler haben immer ein bestimmtes Vorzeichen + oder −, es ist jedoch nicht bekannt. Deshalb werden die zwar abschätzbaren aber nicht erfaßten systematischen Fehler wie zufällige Fehler behandelt; sie gehen dann mit dem Vorzeichen $\pm$ in die Berechnung der Meßunsicherheit ein.

Bereits die Messpraxis zeigt, dass diese Argumentation unzutreffend ist. Nichterfasste systematische Messabweichungen können nicht deshalb als zufällige Messabweichungen eingestuft und behandelt werden, weil deren Vorzeichen unbekannt ist. Beispielsweise ist der Betrag der unbekannten Nullpunktabweichung einer Nivellierlatte bei jeder Lattenaufstellung konstant und nicht zufällig schwankend. Auch die unbekannte Maßstababweichung eines Distanzmessers zeigt bei Messwiederholungen kein zufälliges Verhalten und ändert nicht ihr Vorzeichen. Alle in der Praxis etablierten Messverfahren zur Eliminierung unbekannter systematischer Messabweichungen beruhen auf der Tatsache, dass systematischen Messabweichungen keine »stochastischen Gesetzmäßigkeiten« aufweisen, da ansonsten systematische Messabweichungen prinzipiell nicht eliminiert werden könnten.

In Schwieger (2001) wird in Kap. 2.1 wiederholt:

> Die verbleibenden, nicht mit dem funktionalen Modell oder der Messanordnung beseitigten Abweichungen sind als zufällig zu betrachten (Pelzer 1985). Sie können daher im Allgemeinen als Elementarfehler δ aufgefasst werden.

Diese Aussage vermittelt den Eindruck, in Pelzer (1985) würden ebenfalls unbekannte systematische Abweichungen als Zufallsabweichungen eingestuft. Eine derartige Einstufung lässt sich in Pelzer (1985), dessen Elementarfehlermodell in Gl. (5) bereits angegeben wurde, nicht auffinden. Stattdessen geht Pelzer in Gl. (1-157) von der *separaten* Fortpflanzung systematischer und zufälliger Abweichungen aus:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Delta}_Y^T = \mathbf{F}\,\boldsymbol{\Delta}_X \quad \textit{Fortpflanzung systematischer Abweichungen,}\\
&\boldsymbol{\varepsilon}_Y^T = \mathbf{F}\,\boldsymbol{\varepsilon}_X \quad \textit{Fortpflanzung zufälliger Abweichungen,}\\
&\mathbf{F} = \textit{Funktionsmatrix.}
\end{aligned} \tag{16}$$

In das *Kovarianzfortpflanzungsgesetz* von Pelzer (1985, Gl. (1-159)) fließen ausschließlich Zufallsabweichungen ein:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{YY} = E(\boldsymbol{\varepsilon}_Y \boldsymbol{\varepsilon}_Y^T) = \mathbf{F}\,E(\boldsymbol{\varepsilon}_X \boldsymbol{\varepsilon}_X^T)\,\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\,\boldsymbol{\Sigma}_{XX}\,\mathbf{F}^T. \tag{17}$$

Bei langen Messketten können sich selbst kleinste, bei den Einzelmessungen kaum wahrnehmbare systematische Einflüsse stark verfälschend auswirken. Derartige Effekte lassen sich nur durch lineare Modellierung aufdecken, eine quadratische Berücksichtigung im Kovarianzfortpflanzungsgesetz ist nicht zulässig, bringt keinen Informationsgewinn und verfälscht statistische Schlussfolgerungen. Erinnert sei hier an die zunächst unerklärlichen Widersprüche, die sich bei Nivellements in der Landesvermessung zwischen Linien in Nord-Süd-Richtung gegenüber solchen in der Ost-West-Richtung zeigten. Als Ursache wurde der auf die Drahtaufhängung des Kompensators wirkende Erdmagneteinfluss nachgewiesen, der durch bauliche Veränderungen an den Nivellieren behoben wurde (siehe Beckers et al. 1982). Eine quadratische Berücksichtigung der Systematik im Kovarianzfortpflanzungsgesetz hätte zur Aufdeckung dieser Effekte keinerlei Beitrag leisten können.

Beispiel 2.1: Elementarfehlermodell von Schwieger
Die Manipulationsmöglichkeiten des Elementarfehlermodells seien anhand des in Schwieger (2001, Kap. 3.1) angegebenen Beispiels der Beobachtung zweier elektrooptisch gemessener Strecken von $s_1 = 200\,m$ und $s_2 = 400\,m$ dargelegt:

a) *Anteil der funktional korrelierenden Elementarfehler*
Schwieger berücksichtigt hier die *Nullpunktkorrektion* und die *Frequenzkorrektion*, die er mit $\sigma_0 = 0,2\,mm$ und $\sigma_f = 0,02\,ppm$ veranschlagt. Mit der Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma}_{kal}$ der »Kalibrierfehler« und der Einflussmatrix $\mathbf{F}$

$$\mathbf{\Sigma}_{kal} = \begin{pmatrix} 0,04\,mm^2 & 0 \\ 0 & 0,0004\,ppm^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0,2\,km \\ 1 & 0,4\,km \end{pmatrix} \tag{18}$$

zeigt sich dieser Anteil an der gesamten Kovarianzmatrix zu:

$$\mathbf{F}\,\mathbf{\Sigma}_{kal}\,\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} 0,040016 & 0,040032 \\ 0,040032 & 0,040064 \end{pmatrix} mm^2. \tag{19}$$

Bemerkungen:
Dieser Anteil an der gesamten Kovarianzmatrix weist die *Korrelation*

$$\rho_{kal} = 0,9998 \approx 1 \tag{20}$$

auf, d. h. *funktionale Abhängigkeit* zwischen beiden Streckenmessungen. Demnach ist eine der beiden Strecken streng funktional von der anderen abhängig und keine eigentliche Variable, was die Wirklichkeit unkorrekt wiedergibt!

Die Nullpunktabweichung und die Frequenzabweichung eines Distanzmessers verursachen systematische Messabweichungen, welche die Variabilität der Messdaten und damit ihre Korrelation untereinander nicht beeinflussen können. Werden die systematischen Messabweichungen aber nicht eliminiert und sind sie in den Restabweichungen enthalten, aus denen die Varianz-Kovarianzschätzwerte berechnet werden, können sich betragsmäßig große, verzerrte Korrelationsschätzwerte ergeben.

Abgesehen davon, dass bei der Definition eines Elementarfehlermodells nur Zufallsabweichungen zulässig sind, können darüberhinaus diese (bei Wiederholungsmessungen der jeweiligen Meßgrößen konstanten und nicht zufällig schwankenden) Abweichungen eines Distanzmessers nicht als »Elementar«-fehler im Sinne des Grenzwertsatzes von Moivre und Laplace (Pelzer 1985, Kap. 1.2.1) angesehen werden.

Die bei einer Kalibrierauswertung ermittelten Standardabweichungen kennzeichnen die *Bestimmungsgenauigkeiten* der Kalibrierunbekannten. Bei der Anbringung der Korrektionen an spätere Messungen treten die Kalibrierunbekannten als Messgrößen, für die sich Messwerte ermitteln ließen, nicht in Erscheinung.

b) *Anteil der nicht korrelierenden Elementarfehler*
Das Messrauschen des Instruments bei jeder Messung fasst Schwieger als stochastisch unbabhängige Größe auf. Durch Untersuchungen aus der Literatur kommt er auf die Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma}_\delta$ und unterstellt für die Einflussmatrix $\mathbf{D} = \mathbf{I}$.

$$\mathbf{\Sigma}_\delta = \begin{pmatrix} 0,09 & 0 \\ 0 & 0,09 \end{pmatrix} [mm^2] = 0,09\,mm^2 \cdot \mathbf{I}\ , \quad \rho_\delta = \mathbf{0}. \tag{21}$$

c) *Anteil der stochastisch korrelierenden Elementarfehler*
Aus subjektiven Annahmen und aus allgemeinen Literaturberichten leitet Schwieger Einflüsse der Brechzahlen n_1, n_2 für elektrooptische gemessene Strecken ab, für die er zusätzlich einen Korrelationskoeffizienten von $\rho = 0,9$ unterstellt. Mit der Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma}_n$ für die Brechzahlen n_L und der Einflussmatrix $\mathbf{G}$

$$\mathbf{\Sigma}_n = \begin{pmatrix} 1,69 & 1,52 \\ 1,52 & 1,69 \end{pmatrix} [ppm^2]\,, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} [km] \tag{22}$$

zeigt sich dieser Anteil an der gesamten Kovarianzmatrix zu:

$$\mathbf{G}\,\mathbf{\Sigma}_n\,\mathbf{G}^T = \begin{pmatrix} 0,0676 & 0,1216 \\ 0,1216 & 0,2704 \end{pmatrix} [mm^2]. \tag{23}$$

Bemerkungen:
In diesem Anteil an der gesamten Kovarianzmatrix zeigt sich die *Korrelation*

$$\rho_n = 0,8994 \approx 0,9\,, \tag{24}$$

was schon durch die subjektiv unterstellte Korrelation in der Kovarianzmatrix der Brechzahlen voreingestellt ist.

Unterschiedliche Brechzahlen verursachen jedoch unterschiedliche Refraktionseinflüsse, welche wiederum systematische Messabweichungen bewirken. Diese können die Variabilität der Messdaten und damit ihre Korrelation untereinander nicht beeinflussen und dürfen nicht als Zufallsabweichungen deklariert in einer Kovarianzmatrix zusammengefasst werden. Siehe hierzu auch die Ausführungen im vorletzten Abschnitt von Kap. 2.4.1 und die unter a) angeführten Bemerkungen.

d) *Gesamtkovarianzmatrix*
Aus den drei Anteilen berechnet Schwieger nach Gl. (15) die Kovarianzmatrix der Beobachtungen

$$\mathbf{\Sigma}_{ll} = \begin{pmatrix} 0,198 & 0,162 \\ 0,162 & 0,400 \end{pmatrix} [mm^2] \tag{25}$$

und den Korrelationskoeffizient der Beobachtungen

$$\rho_{ll} = 0,58\,. \tag{26}$$

Bemerkungen:
Der Vergleich mit den zuvor berechneten Korrelationskoeffizienten

$$\rho_{kal} = 1\,, \quad \rho_\delta = 0\,, \quad \rho_n = 0,9\,, \tag{27}$$

der anteiligen Kovarianzmatrizen zeigt keinerlei Übereinstimmung und verdeutlicht, dass der zusammengefasste Korrelationskoeffizient ρ_{ll} eine (eventuell) bestehende Korrelation zwischen den Messwerten *nicht* repräsentieren kann. Er ist nicht nur durch subjektiv veränderte Annahmen in großem Ausmaß manipulierbar, sondern wegen der Berücksichtigung systematischer Messabweichungen auch von vornherein unkorrekt.

3 Genauigkeitsdefinition nach GUM

3.1 Komponenten der Messunsicherheit

Nach GUM (Kap. 2.2.3 des »Leitfadens«) ist die *Messunsicherheit* definiert als:

> Dem Messergebnis zugeordneter Parameter, der die Streuung der Werte kennzeichnet, die vernünftigerweise der Messgröße zugeordnet werden könnte.

Nach Kap. 2.3.2 und Kap. 2.3.3 des »Leitfadens« setzt sich die quantitative Ermittlung der Messunsicherheit aus mehreren Komponenten zusammen, die sich nach der Art, in der ihr Zahlenwert geschätzt wird, in zwei Kategorien einteilen lassen:

A: Komponenten, die mit *statistischen Methoden* berechnet werden,
B: Komponenten, die auf *andere Weise* ermittelt werden.

Die Methoden der Kategorie A nach Kap. 4.2 des »Leitfadens« entsprechen den zuvor in Kap. 2 rekapitulierten statistischen Verfahren, so dass diese Methoden nicht weiter untersucht zu werden brauchen. Die geschätzte Varianz $s^2(x_i)$ bzw. Standardabweichung $s(x_i)$ wird hier auch *Varianz* $u^2(x_i)$ bzw. *Standardunsicherheit* $u(x_i)$ *vom Typ A* genannt.

Nach Kap. 4.3.1 des »Leitfadens« ist für die Ermittlungsmethode B vorgesehen, dass

> die zugehörige geschätzte *Varianz* $u^2(x_i)$ oder die *Standardunsicherheit* $u(x_i)$ *vom Typ B* durch eine wissenschaftliche Beurteilung ermittelt wird, die sich auf alle verfügbaren Informationen über die mögliche Streuung von X_i gründet.

Nachfolgend soll untersucht werden, ob das so definierte Genauigkeitsmaß »wissenschaftlichen« Kriterien genügt und ob es sich »auf alle verfügbaren Informationen über die mögliche Streuung« stützt.

3.2 Kritische Bewertung der »nichtstatistischen« Methode B

3.2.1 Reale Beobachtungen oder subjektive Vermutung

Soweit sich die Ermittlung der möglichen Streuung auf tatsächlich beobachtete Werte einer *Zufallsvariablen* stützt, ist die Methode B begründet. Dies trifft beispielsweise auf die als *Standardabweichung* σ von den Instrumentenherstellern angegebene Genauigkeit zu, welche nach DIN 18723 »Feldverfahren zur Genauigkeitsuntersuchung geodätischer Instrumente« ermittelt wurde.

Für geodätische Anwendungen sollten jedoch keine Genauigkeitsmaße verwandt werden, die sich anstelle aufgrund tatsächlicher Beobachtungen allein aufgrund subjektiver Vermutungen ergeben, wie in Kap. 4.3.5 des »Leitfadens« vorgesehen:

> Es sei der Fall betrachtet, in dem man, gestützt auf verfügbare Informationen feststellen kann: »Es besteht eine 50 %ige Chance, dass der Wert der Eingangsgröße X_i im Bereich von a_- bis a_+ liegt« (mit anderen Worten: Die Wahrscheinlichkeit, dass X_i in diesem Bereich liegt, beträgt 50 %). Wenn angenommen werden kann, dass die Verteilung der möglichen Werte von X_i annähernd eine Normalverteilung ist, lässt sich der Mittelpunkt des Bereichs als bester Schätzwert x_i von X_i annehmen. Wenn die halbe Weite des Bereichs ferner mit $a = (a_+ - a_-)/2$ bezeichnet wird, so lässt sich annehmen, dass $u(x_i) = 1{,}48a$, da der Bereich $\mu \pm \sigma/1{,}48$ für eine Normalverteilung mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ annähernd 50 % der Verteilung einschließt.

In Kap. 4.3.7 des »Leitfadens« wird gefolgert:

> In anderen Fällen ist es vielleicht nur möglich, Schranken (obere und untere Grenzen) für X_i zu bestimmen, vor allem, indem man feststellt: »Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert von X_i im Bereich a_- bis a_+ liegt, ist für alle praktischen Zwecke gleich 1, und die Wahrscheinlichkeit, dass X_i außerhalb dieses Bereichs liegt, liegt im wesentlichen bei Null.« Wenn es keine *speziellen Kenntnisse* über die möglichen Werte von X_i innerhalb des Bereichs gibt, lässt sich nur annehmen, dass im gesamten Bereich etwa die gleiche Wahrscheinlichkeit für die Lage von X_i besteht (eine Gleichverteilung möglicher Werte). Dann liegt x_i, der Erwartungswert von X_i, in der Mitte des Bereichs: $x_i = (a_- + a_+)/2$. Für die zugehörige Varianz gilt:
>
> $$u^2(x_i) = (a_+ - a_-)^2/12. \qquad (28)$$
>
> Wenn die Differenz zwischen den Schranken, $a_+ - a_-$, mit $2a$ bezeichnet wird, so nimmt Gl. (28) folgende Form an:
>
> $$u^2(x_i) = a^2/3. \qquad (29)$$

Unter Bezug auf die *Bayes-Statistik* werden bei der GUM-Methode B die subjektiven Wahrscheinlichkeitsvermutungen nicht nur auf zufällige, sondern auch auf systematische Messabweichungen angewandt, um zu einer vereinheitlichten Behandlung beider Abweichungsarten zu gelangen. In der Tat erlaubt die Bayes-Statistik, auch unbekannten festen (»nichtstatistischen«) Größen Wahrscheinlichkeitsverteilungen zuzuschreiben, jedoch in völlig anderem Zusammenhang.

3.2.2 Prinzip der Bayes-Statistik

In der traditionellen Statistik des Gauß-Markoff-Modells werden die zu schätzenden Parameter nicht als Zufallsvariable, sondern als zwar unbekannte, aber feste Parameter aufgefasst, deren Schätzwerte sich aus den zugrundeliegenden Beobachtungsdaten ergeben. Hierbei ist es nicht möglich, eventuell vorhandene Vorabinformationen über die Parameter in die Schätzung einfließen zu lassen. (Die

Einführung von Pseudobeobachtungen liefert keine Vorabinformationen über die unbekannten Parameter und ist nicht Gegenstand dieser Diskussion.)

Die Bayes-Statistik hingegen ermöglicht die Berücksichtigung vorhandener Vorabinformationen über die Parameter, indem sie subjektive Wahrscheinlichkeiten zulässt. Die Vorabkenntnis, besser gesagt die Unkenntnis oder mangelnde Kenntnis über die Größe der zu schätzenden (objektiv festen) Parameter verleiht diesen den *logischen Status von Zufallsvariablen* mit bestimmten subjektiven Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die den *Stand der unvollkommenen Kenntnis* über die Parameter wiedergeben (siehe Schneeweiß 1978, Kap. 8.1.2). Die Parameterschätzung erfolgt bei der Bayes-Statistik

- aufgrund konkreter Beobachtungsdaten *und*
- gesteuert durch die a-priori-Verteilungen.

Wie bereits aus den oben zitierten Kap. 4.3.5 und 4.3.7 des »Leitfadens« mit den Gl. (28) und (29) ersichtlich ist, sind bei der vorgeschlagenen Varianzberechnung keinerlei reale Beobachtungsdaten gegeben. Eine *Parameter*schätzung wird nicht durchgeführt. Es werden die Varianzen von *Mess*einflüssen aus subjektiven Wahrscheinlichkeitsvermutungen und *nicht* durch eine Bayes-Schätzung abgeleitet. Der Bezug auf die Bayes-Statistik zur Begründung der »Wissenschaftlichkeit« der Methode B ist nicht gegeben.

3.3 Kombinierte Standardunsicherheit und erweiterte Unsicherheit

3.3.1 Kombinierte Standardunsicherheit

Nach Kap. 5 des »Leitfadens« sollen die Varianzen nach Typ A und Typ B mit Hilfe des Varianzfortpflanzungsgesetzes zur *kombinierten Varianz* zusammengefasst werden, deren Quadratwurzel als *kombinierte Standardunsicherheit* bezeichnet wird. Deren Ermittlung sei am Beispiel der Summe und der Differenz von Distanzmessungen dargestellt und dabei die nach Kap. 4.3.7 des »Leitfadens« vorgesehene Berücksichtigung systematischer Messabweichungen als gleichverteilte Zufallsvariable kritisch beleuchtet.

Beispiel 3.1: Kombinierte Varianzen der Summe und der Differenz von Distanzen nach Kap. 5 des »Leitfadens«
Von einem in einer Geraden liegenden Standpunkt aus werden zur einen Seite zwei Distanzen a und b und zur anderen Seite die Distanz c gemessen. Weist der Distanzmesser eine (bekannte oder unbekannte) Additionskonstante δ auf, werden alle Messwerte um den gleichen Betrag mit gleichem Vorzeichen verfälscht.

$$\textit{Messwerte} \quad a' = a + \delta, \quad b' = b + \delta, \quad c' = c + \delta. \tag{30}$$

Die Summe s und die Differenz d zeigt sich dann in der Form:

$$\textit{Summe} \quad s = a' + c' = (a+\delta) + (c+\delta). \tag{31}$$
$$\textit{Differenz} \quad d = a' - b' = (a+\delta) - (b+\delta). \tag{32}$$

Werden für die normalverteilten Distanzmessungen die gleichgroße a-priori-Varianz

$$u^2(a) = u^2(b) = u^2(c) = \sigma^2 \tag{33}$$

und für die Additionskonstante δ nach Gl. (29) (entsprechend Kap. 4.3.7 des »Leitfadens«) die Varianz einer Gleichverteilung

$$u^2(\delta) = \delta^2/3 \tag{34}$$

berücksichtigt, ergeben sich für die Summe s und die Differenz d die gleichgroßen *kombinierten Varianzen*:

$$u_c^2(s) = (u^2(a) + u^2(\delta)) + (u^2(c) + u^2(\delta)) = 2\,\sigma^2 + 2\,\delta^2/3, \tag{35}$$
$$u_c^2(d) = (u^2(a) + u^2(\delta)) + (u^2(b) + u^2(\delta)) = 2\,\sigma^2 + 2\,\delta^2/3. \tag{36}$$

Veranschlagt man die »Varianz« der Additionskonstante nach Gl. (34) mit $u^2(\delta) = \sigma^2$, folgt:

kombinierte Varianzen
$$u_c^2(s) = u_c^2(d) = 4\,\sigma^2. \tag{37}$$

kombinierte Standardunsicherheiten
$$u_c(s) = u_c(d) = 2\,\sigma. \tag{38}$$

3.3.2 Kritische Anmerkungen zur kombinierten Standardunsicherheit

Die kombinierte Standardunsicherheit nach Kap. 5 des »Leitfadens« soll sowohl die Präzision als auch die Richtigkeit der Summe und der Differenz der Distanzen repräsentieren, was nach Kap. 2 dieses Beitrages nicht möglich ist. Die Varianzen der Summe s und der Differenz d des Beispiels 3.1 ergeben sich nach dem *quadratischen Varianzenfortpflanzungsgesetz*:

$$\sigma_s^2 = \sigma_a^2 + \sigma_c^2 = 2\sigma^2, \tag{39}$$
$$\sigma_d^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 = 2\sigma^2. \tag{40}$$

Die *Standardabweichungen*

$$\sigma_s = \sigma_d = 1{,}41 \cdot \sigma \tag{41}$$

sind die statistischen Präzisionsmaße von s und d. Mit ihnen lassen sich weitere statische Schlussfolgerungen ziehen, z. B. Konfidenzintervalle berechnen oder Ausreißertests durchführen. Die im vorigen Abschnitt berechneten kombinierten Standardunsicherheiten sind durch den Anteil der systematischen Abweichungen verzerrte, vergrößerte Schätzwerte. Würden mit ihnen Ausreißertests durchgeführt (die wegen der bewussten Verzerrung nicht zulässig sind!), wäre deren Wirksamkeit vermindert.

Lineare Fortpflanzung systematischer Messabweichungen:
Systematische Messabweichungen pflanzen sich *linear* fort und folgen nicht den statistischen (quadratischen) Gesetzmäßigkeiten. Daher lässt sich ihre Fortpflanzung dem Varianzenfortpflanzungsgesetz *nicht* subsumieren. Die unterschiedliche Behandlung zufälliger und systematischer Messabweichungen ist vielfältig belegt und verdeutlicht worden, wie z. B. anhand Pelzer (1985, Kap. 1.5.1) in Gl. (16) und Gl. (17) dokumentiert.

Weist der Distanzmesser eine Additionskonstante δ auf, werden alle Messwerte immer um den gleichem Betrag mit gleichem Vorzeichen verfälscht. Die Summe s wird um

$$\delta_s = \delta + \delta = 2\delta\,, \tag{42}$$

also um den doppelten Betrag der Additionskonstante verfälscht, für die Differenz d hingegen zeigt sich wegen

$$\delta_d = \delta - \delta = 0 \tag{43}$$

keine Verfälschung. Die Richtigkeit der Summe s und der Differenz d wird durch die Additionskonstante unterschiedlich beeinflusst.

Gegenüberstellung:
Nach GUM: $u_c(s) = u_c(d) = 2\,\sigma.$
Nach Kap. 2: $\sigma_s = \sigma_d = 1{,}41 \cdot \sigma, \quad \delta_s = 2\delta\,, \quad \delta_d = 0.$

Offensichtlich geben die nach Kap. 5 des »Leitfadens« berechneten kombinierten Standardunsicherheiten die Genauigkeitsverhältnisse sowohl für die Summe s als auch für die Differenz d der Distanzen *nicht korrekt* wieder.

Am Beispiel 3.1 lässt sich auch verdeutlichen, dass die »gesetzmäßige« Auswirkung systematischer Messabweichungen bei der Auswahl günstiger Messanordnungen berücksichtigt wird. Will man den Abstand der Endpunkte einer Strecke mit einem Distanzmesser ermitteln und

- wählt man die Messanordnung »Summe« nach Gl. (31), d. h. wählt man einen Standpunkt zwischen den Endpunkten der Strecke, ist die unbekannte Additionskonstante mit dem doppelten Betrag im Ergebnis der Streckenlänge enthalten.
- wählt man seinen Standpunkt auf einem der beiden Streckenendpunkte, ist die unbekannte Additionskonstante mit dem einfachen Betrag im Ergebnis der Streckenlänge enthalten.
- wählt man die Messanordnung »Differenz« nach Gl. (32), d. h. wählt man den Standpunkt in der Verlängerung hinter einem Endpunkt der Strecke, wird die unbekannte Additionskonstante durch die Differenzbildung eliminiert.

Die Eliminierung unbekannter systematischer Messabweichungen wird durch vielfältig bewährte Messanordnungen erreicht, wie z. B. Basislattenmessung in zwei Lagen (»Basislattenprinzip«), Winkelmessung in zwei Lagen, Nivellement aus der Mitte usw. Dies ließe sich prinzipiell nicht erreichen, wenn die systematischen Messabweichungen Zufallsabweichungen wären. Daher sind die diesbezüglichen GUM-Regelungen unkorrekt.

3.3.3 Erweiterte Unsicherheit

Kap. 6 des »Leitfadens« sieht die Ermittlung der *erweiterten Unsicherheit* U durch Mulitiplikation der kombinierten Standardabweichung $u_c(y)$ mit einem *Erweiterungsfaktor* k vor:

$$U = k \cdot u_c(y). \tag{44}$$

Obwohl für den Bereich $Y = y \pm U$ die Begriffe »Vertrauensbereich« und »Konfidenzintervall« nicht verwandt werden sollen, wird diesem Bereich doch die *Überdeckungswahrscheinlichkeit* oder der *Grad des Vertrauens* p zugewiesen. Die Angabe einer Wahrscheinlichkeit kann aber nur bei Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsverteilung und der zugehörigen Quantile erfolgen.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen Y, die durch lineare Transformation unterschiedlich verteilter Zufallsvariablen X_i entsteht, lässt sich als *Faltung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen* der Zufallsvariablen X_i berechnen (siehe Schmidt 1994, Kap. 3.2). Allgemein erweist sich die Summe Y jeder Anzahl n normalverteilter unabhängiger Zufallsvariablen X_i selbst als normalverteilt. Ein mit dem Quatil $k = 1{,}96$ gebildetes Konfidenzintervall für einen Parameter der normalverteilten Zufallsgröße Y besitzt die Vertrauens-Wahrscheinlichkeit $P = 95\%$.

Die Summe beliebig verteilter Zufallsvariablen ist jedoch nur asymptotisch ($n \rightarrow \infty$) normalverteilt. Daher weichen die Quantile der Faltung einer normalverteilten mit einer gleichverteilten Zufallsvariablen von den Quantilen einer Normalverteilung ab, was bei der Berechnung von Konfidenzintervallen (hier »erweiterte Unsicherheit« genannt) zu beachten ist.

Werden ein Varianzschätzwert nach Typ A und eine »Vermutungs«-Varianz nach Typ B zusammengefasst, setzt sich die Faltungsverteilung aus einer t-Verteilung und aus einer Gleichverteilung zusammen. Die Quantile dieser Faltungsverteilung weichen sogar erheblich von den Quantilen der Normalverteilung ab und sind außerdem nur durch aufwändige Integrationsrechnungen bestimmbar. Daher ist es hier nicht korrekt, der mit dem Quantil $k = 2$ gebildeten »erweiterten Unsicherheit« die Überdeckungswahrscheinlichkeit 95% zuzuweisen.

Für die Festlegung der Quantile einer abgeleiteten, t-verteilten Zufallsgröße ist die Kenntnis ihres Freiheitsgrades erforderlich. Wird die Schätzgröße y aus n t-verteilten Schätzgrößen x_i (Varianzschätzwerte $\hat{\sigma}_i^2$, Freiheitsgrade f_i) gebildet, deren Messwerte unterschiedliche a priori Varianzen σ_i^2 aufweisen, lässt sich als Näherung ein *effektiver Freiheitsgrad* f_{eff} nach der bekannten »Welch-Satterthwaite-Formel« berechnen, die auch in Kap. G.4 des »Leitfadens« angegeben ist:

$$y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \tag{45}$$

$$\hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \ldots + \hat{\sigma}_n^2, \tag{46}$$

$$f_{eff} = \frac{(\hat{\sigma}_y^2)^2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{(\hat{\sigma}_i^2)^2}{f_i}}. \tag{47}$$

Diese Formel darf ausschließlich bei der Zusammensetzung t-verteilter Schätzgrößen x_i nach Gl. (45) mit Varianzschätzwerten $\hat{\sigma}_i^2$ (Typ A) nach Gl. (46) angewandt werden, die anhand von Messwerten mit den Freiheitsgraden f_i berechnet wurden. Sie gilt *nicht* bei subjektiven »Vermutungsvarianzen« σ_i^2 (Typ B) angeblich gleichverteilter systematischer Einflussgrößen, für die die Freiheitsgrade $f_i = \infty$ angenommen werden! Folglich lässt sich entgegen der Aussage in Kap. G.4 des »Leitfadens« in diesen Fällen eine »erweiterte Unsicherheit« *nicht* angeben.

In Lang (2001) wird in Tab. 3 ein Beispiel angegeben, bei dem mit einem einzigen aus Messungen ermittelten Varianzschätzwert $\hat{\sigma}_1^2$ (Typ A) beim Freiheitsgrad $f_1 = 4$ und fünf weiteren subjektiven »Vermutungsvarianzen« $\sigma_2^2, \ldots, \sigma_6^2$ (Typ B) mit den angenommenen Freiheitsgraden $f_2 = \ldots = f_6 = \infty$ ein effektiver Freiheitsgrad $f_{eff} = 8370$ berechnet wird. Allein schon dieses Ergebnis verdeutlicht, dass die Voraussetzungen zur Anwendung der Gl. (47) nicht erfüllt sind.

3.4 »Informationen« über systematische Messabweichungen in der Geodäsie

Die Varianzberechnung nach der Methode B soll sich »auf alle verfügbaren Informationen über die mögliche Streuung von X_i gründen«. Fasst man jedoch, wie in Gl. (29) vorgesehen, die systematischen Messabweichungen als gleichverteilte Zufallsvariable auf, lässt man bewusst »verfügbare Informationen« außer Acht. Bekanntermaßen zeigen sich bei geodätischen Messungen gleichartige systematische Messabweichungen, die sich *nicht* wie Zufallsabweichungen, sondern »gesetzmäßig« verhalten, wie es bereits in der »Fehlerlehre« älterer geodätischer Literatur heißt (z. B. Wolf 1968, Kap. 1).

Selbst bei systematischen Messabweichungen, deren Auswirkungen unterschiedliche Vorzeichen annehmen können, ist das Verhalten »gesetzmäßig« und berechenbar, wie z. B. die Auswirkungen der Stehachsschiefe eines Theodolits in unterschiedliche Zielrichtungen (siehe Deumlich und Staiger 2002, Kap. 6.1).

Selbstverständlich kann in der Praxis die Zuordnung der Messeinflüsse Probleme bereiten und eine exakte Trennung in »zufällig« und »systematisch« nicht immer möglich sein. Dies trifft beispielsweise zu, wenn bei der elektrooptischen Distanzmessung die Lufttemperatur zwischen Stand- und Zielpunkt unterschiedlich ist oder sogar entlang des Lichtweges Fluktuationen aufweist. Bei kurzzeitigen Schwankungen um einen Mittelwert (vergleichbar etwa dem Luftflimmern beim Nivellieren), wird das Zufallsstreuen beeinflusst. Der Einfluss wirkt sich bei Wiederholungsmessungen direkt auf die Messwerte aus und schlägt sich in den Schätzwerten für die Varianzen sowie die Kovarianzen und die Korrelationen nieder.

Refraktionserscheinungen verfälschen das Messergebnis jedoch systematisch. Verändern sich die systematischen Einflüsse während des Messungsverlaufes funktional, verschiebt sich bei Wiederholungsmessungen der Erwartungswert einer Messgröße. Dann gehören die Messwerte nicht mehr *einer* homogenen Population mit einem bestimmten Erwartungswert und einer bestimmten Varianz an, sondern es entstehen Teilpopulationen mit unterschiedlichen Parametern. Werden die Verschiebungen zwischen den Teilpopulationen nicht eliminiert und die Teilpopulationen zusammengefasst ausgewertet, ergeben sich verzerrte Parameterschätzwerte. Die Verzerrungen durch die systematischen Einflüsse lassen sich nur instrumentell oder messtechnisch vermeiden bzw. eliminieren. Gegebenenfalls sind sie durch Prüfmessungen zu erfassen und zu modellieren, um sie bei anderweitigen Messungen unter vergleichbaren Messbedingungen als Korrektionen berücksichtigen zu können.

4 Zusammenfassung

Im »Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM)« (deutsche Fassung: »Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen«) wurde das Genauigkeitsmaß »Messunsicherheit« definiert, welches entgegen den Regeln der traditionellen mathematischen Statistik systematische und zufällige Messeinflüsse *einheitlich* behandelt und zusammenfasst. In diesem Beitrag wird aufgezeigt, dass dieses Genauigkeitsmaß zur Anwendung in der geodätischen Messpraxis *nicht* empfohlen werden kann, weil die zufälligen und die systematischen Messabweichungen bei ihrer Fortpflanzung unterschiedliches Verhalten zeigen.

Weiterhin wird gezeigt, dass Elementarfehlermodelle, in denen systematische Messabweichungen als definierendes Konstruktionselement eingesetzt werden, den Grundregeln der mathematischen Statistik nicht entsprechen und subjektive, eventuell stark verfälschte Korrelationswerte liefern.

Literatur

Beckers, H., Frevel, H., Gottschalk, H.-J.: Die Bestimmung des Einflusses des Erdmagnetfeldes auf Nivellementsergebnisse durch Ausgleichung eines Nivellementnetzes. Vermessungswesen und Raumordnung 44/8, S. 429–438, 1982.

Bessel, F. W.: Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit von Beobachtungsfehlern. Astronomische Nachrichten Vol. 15, 369 ff., 1837.

Deumlich, F., Staiger, R.: Instrumentenkunde der Vermessungstechnik. Herbert Wichmann Verlag Heidelberg, 2002.

Hagen, G.: Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. F. Dümmler Berlin, 1837.

Heister, H.: Zur Angabe der Meßunsicherheit in der Geodätischen Meßtechnik. In: Heister, H. und Staiger, R., (Hrsg.), Qualitätsmanagement in der geodätischen Messtechnik. Schriftenreihe des DVW Band 42/2001, S. 108–119.

Höpcke, W.: Fehlerlehre und Ausgleichungsrechnung. Walter de Gruyter, Berlin 1980.
Lang, L.: Die Bestimmung von Messunsicherheiten an praktischen Beispielen. In: Heister, H. und Staiger, R., (Hrsg.), Qualitätsmanagement in der geodätischen Messtechnik. Schriftenreihe des DVW Band 42/2001, S. 138–150.
Matthias, H. J.: Bedeutung und Konstruktion von Kovarianzen in der Meßtechnik. Mitteilungen aus dem Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der ETH Zürich Nr. 41, 1986.
Möser, M., Müller, G., Schlemmer, H., Werner, H.: Handbuch Ingenieurgeodäsie; Grundlagen. Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg 2000.
Pelzer, H.: Grundlagen der Mathematischen Statistik und der Ausgleichungsrechnung. in: Pelzer, H., (Hrsg.), Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II. Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart, S. 3–120, 1985.
Schmidt, H.: Meßunsicherheit und Vermessungstoleranz bei Ingenieurvermessungen. Veröffentlichung des Geodätischen Instituts der RWTH Aachen Nr. 51, 1994.
Schmidt, H.: Zur Problematik von Korrelationsschätzungen und Genauigkeitsangaben in der Meßtechnik. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten 103, S. 225–232, 1996.
Schneeweiß, H.: Ökonometrie. Physica-Verlag, Würzburg-Wien, 1978.
Schwarz, W. (Red.): Vermessungsverfahren im Maschinen- und Anlagenbau. Schriftenreihe des DVW, Band 13. Verlag Konrad Wittwer 1995.
Schwieger, V.: Ein Elementarfehlermodell für GPS-Überwachungsmessungen – Konstruktion und Bedeutung interepochaler Korrelationen. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover Nr. 231, 1999.
Schwieger, V.: Zur Konstruktion synthetischer Kovarianzmatrizen. ZfV 126, S. 143–150, 2001.
Witte, B., Schmidt, H.: Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik im Bauwesen. Wittwer Verlag Stuttgart, 2000.
Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Ferd. Dümmlers Verlag Bonn, 1968.

Normen:
ISO: Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM). International Organization for Standardization, Genève, 1995.
DIN V ENV 13005 (06.1999): Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen.
DIN 2257-2 (08.1974): Begriffe der Längenprüftechnik; Fehler und Unsicherheiten beim Messen.
DIN 18723: Feldverfahren zur Genauigkeitsuntersuchung geodätischer Instrumente; Teil 1 (06.1990): Allgemeines; Teil 2 (06.1990): Nivelliere; Teil 3 (06.1990): Theodolite; Teil 4 (06.1990): Optische Distanzmesser; Teil 5 (06.1990): Lotinstrumente; Teil 6 (06.1990): Elektrooptische Distanzmesser für den Nahbereich; Teil 7 (06.1990): Vermessungskreisel; Teil 8 (08.1998): Rotationslaser.
DIN 55350-13 (07.1987): Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik – Begriffe zur Genauigkeit von Ermittlungsverfahren und Ermittlungsergebnissen.

Anschrift des Autors
Dr.-Ing. Hubert Schmidt
Geodätisches Institut der RWTH Aachen
Templergraben 55, D-52062 Aachen
Tel. 0241-8095281/8095300
hubert.schmidt@gia.rwth-aachen.de