Gravimetrie – mit Erdsatelliten?

Manfred Schneider

Zusammenfassung
Vorgestellt wird ein Verfahren zur Schwerefeldbestimmung mit Erdsatelliten, das als Fluggravimetrie gedeutet werden kann. Es basiert auf der Verwendung impliziter Störungsgleichungen aus der himmelsmechanischen Störungsrechnung. Das Verfahren ist iterativ angelegt und kommt ohne eine analytisch ausgearbeitete Bahntheorie oder eine numerisch erzeugte Ephemeride aus. Als Eingangsdaten werden hypothesenfrei bestimmte Satellitenbahnen und die Messung nicht-gravitativer Kräfte und die ausreichend genaue Modellierung sonstiger gravitativer Kräfte benötigt. Diese Voraussetzungen können in den neueren Satellitenmissionen CHAMP, GRACE und GOCE als gegeben betrachtet werden.

Summary
A new method for gravity field recovery from satellites is proposed, which can be considered as a variant of airborne gravimetry. It is based on the use of implicit perturbation equations known from Celestial Mechanics. It is proposed as an iterative scheme and there is no need for analytically and/or numerically generated orbits. It is assumed that a priori information on the satellite´s motion as well as measured non-gravitational and sufficiently modelled gravitational forces other than the Earth´s gravitation are available. This can be assumed for the new satellite missions CHAMP, GRACE and GOCE.

1 Vorbemerkung

Die Schwerkraft in einem Galileisystem B, d. h. in einem translatorisch beschleunigt bewegten und/oder rotierenden Bezugssystem,

$$\mathbf{S} = \mathbf{G} + \mathbf{T} \tag{1}$$

setzt sich aus zwei Komponenten zusammen (Schneider 1992–1999, I § 5):

der *Gravitationskraft* (vektoranalytische Differentialoperationen werden mit Hilfe des Nabla-Operators $\nabla_{\mathbf{r}}$ dargestellt)

$$\frac{\mathbf{G}(\mathbf{r},t)}{m} = \nabla_{\mathbf{r}} \iiint\limits_{Erde} \frac{G\rho(\vec{\xi},t)d\kappa}{l} =: \nabla_{\mathbf{r}} U_G(\mathbf{r},t) \tag{2}$$

mit

m Masse des Testkörpers

$l = \left|\mathbf{r} - \vec{\xi}\right|$ Abstand des Quellpunktes $\vec{\xi}$ vom Aufpunkt $\mathbf{r}$,

der Erde (Ozeane und Atmosphäre einbezogen) im Aufpunkt $\mathbf{r}$ zum Zeitpunkt t, herrührend von der momentanen Massenverteilung, beschrieben durch die Verteilung der Massendichte $\rho(\vec{\xi},t)$ in der Erde, und der Summe

$$\mathbf{T} = \mathbf{F} + \mathbf{Z} + \mathbf{E} + \mathbf{C} \tag{3}$$

der *Trägheitskräfte*, die im Bezugssystem B auftreten. Dazu wird in der bodengebundenen Gravimetrie meist nur die Fliehkraft

$$\mathbf{Z} = -m\mathbf{d} \times (\mathbf{d} \times \mathbf{r}) \tag{4}$$

zufolge einer als gleichmäßig angenommen Erddrehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathbf{d}$ berücksichtigt. In der *Schiffs- und Fluggravimetrie* (Torge 1989) hingegen müssen als weitere bezogene Trägheitskräfte

die Corioliskraft $\mathbf{C} = \nabla_{\mathbf{r}}\Phi$ (5)

und

die Eulersche Kreiselkraft $\mathbf{E} = \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}$ (6)

berücksichtigt werden, die auf die Bewegung des Gravimeters im Bezugssystem B und eine Drehbewegung $\mathbf{d}$(t) zurückzuführen sind. Während die Corioliskraft aus der skalaren, aber geschwindigkeitsabhängigen Potentialfunktion (Schneider 1992–1999, I § 4)

$$\Phi := -2\mathbf{x} \cdot \left(\mathbf{d}(t) \times \frac{D\mathbf{x}}{dt}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = \nabla_{r}\Phi \tag{7}$$

oder wahlweise aus dem *Vektorpotential*

$$\mathbf{B} := \mathbf{x} \times \left(\mathbf{d}(t) \times \frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right) \Rightarrow \mathbf{C} = \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \tag{8}$$

hergeleitet werden kann, gelingt für die Eulersche Kreiselkraft nur eine Darstellung aus einem Vektorpotential

$$\mathbf{A} := \frac{1}{3}\mathbf{x} \times \left(\frac{D\mathbf{d}}{Dt} \times \mathbf{x}\right) \Rightarrow \mathbf{E} = \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}\,. \tag{9}$$

In den Potentialfunktionen bedeuten $\mathbf{x}(t)\; bzw. \frac{D\mathbf{x}}{Dt}$ die Bahn bzw. Geschwindigkeit des Gravimeters im Bezugssystem B. Weiter ist $\mathbf{d}(t)$ bzw. $D\mathbf{d}/Dt$ die Winkelgeschwindigkeit bzw. Winkelbeschleunigung der Drehbewegung des Bezugssystems B. Über dieses ist bisher nichts weiter gesagt.

Beispiel: Ist das Bezugssystem B ein geozentrisches, erdgebundenes System, so bedeutet **d**(t) die Winkelgeschwindigkeit der Erde gegen ein geozentrisches, nichtrotierendes Bezugssystem, etwa ein geozentrisches astronomisches Bezugssystem. Eine Winkelbeschleunigung D**d**/Dt rührt dann von der variablen Erddrehung her. In der bodengebundenen Gravimetrie konnte sie lange Zeit vernachlässigt werden. Inzwischen ist aber die Messgenauigkeit so gut, dass man mit Gravimetermessungen die Verlagerung der Drehachse nachweisen kann, die sich in einer Änderung der Fliehkraft **Z** bemerkbar macht.

In der Schiffs- bzw. Fluggravimetrie beschreibt **x**(t) die Bahn des Schiffes bzw. Flugzeuges im geozentrischen, erdgebundenen Bezugssystem B. Die Wirkung dieser Bewegung führt dann in B zu einer Corioliskraft **C.** Um diese Auswirkung aus den Gravimetermessungen herauszunehmen, wird an diesen bekanntlich die sog. *Eötvös-Korrektion* (Torge 1989) angebracht.

Die Schwerkraft der Erde ist nach dem Gesagten also abhängig von der Festlegung des Bezugssystems B, in dem die Messung ausgeführt wird.

Im Unterschied zur Gravitationskraft, in der die Anziehungskraft der momentanen Massenverteilung der Erde (Erdkörper, Wassermassen und Atmosphäre) sowie der felderzeugenden Drittkörper, vor allem Mond und Sonne, zum Ausdruck kommt, sind die Trägheitskräfte eine Folge der speziellen Messsituation.

2 Konzept einer Satellitengravimetrie

Kann man mit Erdsatelliten eine Art Fluggravimetrie treiben? Bisher verbindet man ja nicht unbedingt mit satellitengestützter Gravitationsfeldbestimmung den Begriff Gravimetrie.

Die neueren Satellitenmissionen CHAMP, GRACE (www.gfz-potsdam.de) und die in Vorbereitung befindliche GOCE-Mission (Müller 2001, www.goce-projektbuero.de/) mit ihren neuen Messmöglichkeiten lassen aber ein Verfahren zu, das man als Satellitengravimetrie, die Satellitengradiometrie einmal subsumiert, bezeichnen kann (Schneider 2002).

Um das einzusehen, soll das Bezugssystem B als geozentrisch und erdgebunden etwa im Sinne des ITRS, des International Terrestrial Reference Systems, gewählt werden. Dessen Verknüpfung mit dem astronomischen ICRS, dem International Celestial Reference System, wird mit sehr hoher Genauigkeit durch den IERS, den International Earth Rotation Service, sichergestellt. D. h., man kennt die Drehbewegung **d**(t) des ITRS gegen das ICRS sehr genau. Auf die Unterscheidung zwischen ITRS und ITRF bzw. zwischen ICRS und ICRF soll verzichtet werden.

Die Satelliten der oben genannten Missionen werden über GPS-Messungen praktisch lückenlos in ihrer Bahnbewegung um die Erde verfolgt. Die Umlaufbewegung **x**(t) dieser Satelliten kann aus diesen GPS-Messungen in sehr guter Qualität rekonstruiert werden. Hinzu kommen fortwährende in situ-Messungen (Schneider 1992–1999, IV § 61) der nichtgravitativen Kräfte im Flugbereich der Satelliten sowie Lagebestimmungsmessungen mit Hilfe von Sternsensoren. Damit sind die bisherigen Nachteile (Lückenhaftigkeit in der Verteilung der Messdaten) bodengebundener Ortungsverfahren beseitigt. Letztere dienen jetzt mehr der Eichung der satellitengestützten Bahnverfolgung und der terrestrischen Anbindung der Bahnen und der Bahnbestimmung der GPS-Satelliten selbst.

Ziel einer Satellitengravimetrie ist es, die Schwerebeschleunigung des Satelliten entlang seiner Umlaufbahn zu bestimmen, also die Schwerefeldfeldstärke

$$\frac{\mathbf{S}}{m} = \nabla_{\mathbf{r}} U_S + \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}\,. \tag{10}$$

Das Schwerepotential U_S setzt sich nach den obigen Ausführungen aus mehreren Anteilen zusammen

$$U_S := U_G + U_Z + \Phi\,, \tag{11}$$

worin bedeuten (Schneider 1992–1999, I § 4)

$$\begin{aligned}
&U_G && \textit{Gravitationspotential,}\\
&U_Z := \frac{1}{2}(\mathbf{d}(t)\times\mathbf{x}(t))^2 && \textit{Potential der Fliehkraft,}\\
&\Phi := -2\mathbf{x}\cdot\left(\mathbf{d}(t)\times\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right) && \textit{Potential der Corioliskraft.}
\end{aligned} \tag{12}$$

Für das Weitere soll das Gravitationspotential noch aufgespalten werden entsprechend

$$U_G := U_0 + \tilde{R} \tag{13}$$

mit

U_0 Gravitationspotential eines ungestörten Problems,

$\tilde{R}$ Störungsfunktion.

Unter dem Potential des ungestörten Problems U_0 sei im Folgenden das Potential der Keplerkraft verstanden,

$$\mathbf{K}_{Kep} := -\frac{mGM_\oplus}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = m\nabla_{\mathbf{r}}\frac{GM_\oplus}{r}\,, \tag{14}$$

also der Anziehungskraft der Erde, als kugelsymmetrischer Körper mit der Masse $M_\oplus$ aufgefasst. G ist die

Newtonsche Gravitationskonstante, $\mathbf{r}$ der geozentrische Ortsvektor des punktartigen Satelliten der Masse m.

Die Störungsfunktion $\tilde{R}(\mathbf{r},t)$ (Schneider 1992–1999, II § 21) beschreibt dann den längen- und breitenabhängigen Teil des Gravitationspotentials, den man beispielsweise nach Kugelflächenfunktionen entwickelt denken kann, womit dann eine Parametrisierung des äußeren Gravitationsfeldes der Erde vorliegt, mit den zu bestimmenden Potentialkoeffizienten C_{lm} und S_{lm} als Parametern. Diese müssen im ITRS als zeitabhängig angenommen werden, um u. a. der nacheiszeitlichen Entlastungsreaktion der Erde gerecht zu werden.

Zufolge der Anisotropie $\tilde{R}$ des Außenraumfeldes der Erde bewegt sich ein punktartiger Erdsatellit nicht mehr auf einer elliptischen Keplerbahn um die Erde, beschrieben etwa durch die Bahnelemente (Schneider 1992–1999, II § 21)

i *Neigung der Bahnebene,*
Ω *Rektaszsension des aufsteigenden Bahnknotens,*
ω *Argument des Perigäums,*
a *große Halbachse der Ellipsenbahn,*
e *numerische Exzentrizität der Bahnellipse,*
τ *Perigäumsdurchgangszeit.*

Die gestörte Keplerbewegung kann man im Sinne der »Variation der Konstanten« (Schneider 1992–1999, II § 21) beschreiben durch zeitveränderliche Bahnelemente

$$i(t),\Omega(t),\omega(t),\ldots\tau(t)\,,$$

aus denen sich der momentane Bewegungszustand $\mathbf{r}(t)$, $d\mathbf{r}/dt$ des Satelliten im ICRS mit Hilfe der bekannten Lösung des Keplerproblems berechnen lässt.

Die Zeitveränderlichkeit der Bahnelemente wird geregelt durch die sog. Störungsgleichungen (Schneider 1992–1999, II § 21)

$$\frac{d\vec{\alpha}}{dt}=f(\vec{\alpha};t):=\Psi^{-1}F_{\vec{\alpha}}\qquad mit\;\; F_{\vec{\alpha}}:=(F_{\alpha_1},\ldots,F_{\alpha_6})^T\,, \tag{15}$$

deren rechte Seiten bekannte Funktionen der über die Keplerkraft hinausgehenden Kräfte im Flugbereich, und der Zeit sind. In diesen Störungsgleichungen bedeutet Ψ^{-1} die Inverse der Matrix der Lagrange-Klammern

$$\Psi:=\left(\left[\alpha_i\;\alpha_j\right]\right)\quad mit\quad \left[\alpha_i\;\alpha_j\right]:=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\alpha_j}-\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha_j}\cdot\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\alpha_i}\,, \tag{16}$$

die mit der bekannten Lösung des Kepler-Problems berechenbar sind. Diese 6×6-Matrix ist schiefsymmetrisch und hat daher höchstens 15 von Null verschiedene Elemente. Im Falle der Kepler-Elemente erweisen sich sogar nur sechs Lagrange-Klammern als von Null verschieden, was die Inversion der Matrix Ψ sehr vereinfacht. Die Größen $F_{\vec{\alpha}}$ sind erklärt durch

$$F_{\vec{\alpha}}\equiv\left(F_{\alpha_i}\right):=\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{R}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha_i}+\mathbf{z}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha_i}=\nabla_{\vec{\alpha}}\tilde{R}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha_i}+\quad\mathbf{n} \tag{17}$$

mit dem Nablaoperator $\nabla_{\vec{\alpha}}:=\left(\partial/\partial\alpha_1,\ldots,\partial/\partial\alpha_6\right)^T$

oder komponentenweise

$$F_{\alpha_i}=\frac{\partial\tilde{R}}{\partial\alpha_i}+n_{\alpha_i}\,. \tag{18}$$

Sie sind also abhängig von der Feldstärke der *Anisotropie* $\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{R}$ des Gravitationsfeldes der Erde einerseits und allen sonstigen gravitativen (Sonne, Mond) und nichtgravitativen (Strömungswiderstand der Hochatmosphäre, Strahlungsdruck, Magnetfeld usw.) Kräften, die zur Resultierenden, auf die Masseneinheit bezogenen Kraft $\mathbf{z}$, zusammengefasst sind.

Stellt man die Störungsgleichungen folgendermaßen um

$$\Psi\dot{\vec{\alpha}}=F_{\vec{\alpha}}\;\Rightarrow\;\nabla_{\vec{\alpha}}\tilde{R}=\Psi\dot{\vec{\alpha}}-\mathbf{n}=\Psi\dot{\vec{\alpha}}-\mathbf{z}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\vec{\alpha}}\,, \tag{19}$$

stellt sie also in der nichtaufgelösten (impliziten) Form an den Anfang, so erkennt man, dass sich diese Gleichungen zur Bestimmung von $\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{R}$ bei gegebenen Änderungsraten $\dot{\vec{\alpha}}(t)$ der Bahnelemente und den gemessenen/modellierten Kräften $\mathbf{z}$ heranziehen lassen. Als Grundgleichung der Satellitengravimetrie, genauer als *Grundgleichung der Gravitationsfeldbestimmung* kann somit verwendet werden (Schneider 2002)

$$\boxed{\nabla_{\vec{\alpha}}\tilde{R}=\Psi\dot{\vec{\alpha}}-\mathbf{n}}\,. \tag{20}$$

Daraus lässt sich iterativ die Feldstärke $\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{R}$ aus Näherungen der rechten Seite ermitteln. Bezeichnet k den Iterationsindex, so besteht die Iterationsfunktion

$$\left(\nabla_{\vec{\alpha}}\tilde{R}\right)^{(k+1)}=\Psi\left(\dot{\vec{\alpha}}\right)^{(k)}-\mathbf{n}\qquad k=0,1,\ldots \tag{21}$$

Als Ausgangsnäherung kann man in die rechten Seiten der expliziten Störungsgleichungen

$$\left(\frac{d\vec{\alpha}}{dt}\right)=f(\vec{\alpha};t):=\Psi^{-1}\left(\left(\nabla_{\vec{\alpha}}\tilde{R}\right)+\mathbf{n}\right) \tag{22}$$

eingehen mit einer Näherung $\left(\nabla_{\vec{\alpha}}\tilde{R}\right)^{(0)}$, berechnet mit a priori-Werten der Gravitationsfeldparameter. Hat die Iteration einen Fixpunkt, so erhält man nach K Schritten aus der Grundgleichung $\left(\nabla_{\bar{\alpha}}\tilde{R}\right)^{(K+1)}$ eine bessere Annäherung an die gesuchte Feldstärke in den einzelnen Bahnpunkten $\mathbf{r}(t_n)$.

Dieser Grundgedanke soll jetzt übertragen werden auf die *Schwerefeldbestimmung* im ITRS. Die bisher verwendeten Störungsgleichungen beziehen sich auf das rotationsfreie ICRS. Das oben dargestellte Konzept der Gravitationsfeldbestimmung basierend auf impliziten Störungsgleichungen kann wortgetreu übernommen werden für die Schwerefeldbestimmung. Die Störungsgleichungen für eine gestörte Keplerbahn lauten in einem Galilei-System (Schneider 1992–1999, I § 4), ein solches ist auch das ITRS,

$$\frac{D\bar{\bar{\alpha}}}{Dt} = \left(\frac{D\bar{\bar{\alpha}}}{Dt}\right)_{ungestört} + \bar{\Psi}^{-1} F_{\bar{\bar{\alpha}}}\,. \tag{23}$$

Im Unterschied zum oben diskutierten Fall tritt jetzt ein Term auf, der *kinematischer* Natur ist und von der Relativbewegung der Bezugssysteme ITRS und ICRS herrührt. Es gilt (Querstriche bedeuten, dass die Variablen im Galilei-System gemeint sind)

$$\left(\frac{D\bar{\alpha}_i}{Dt}\right)_{ungestört} \neq 0 \quad \text{im Falle } \bar{\alpha}_i \in \left\{\bar{i}, \bar{\Omega}, \bar{\omega}\right\}. \tag{24}$$

Für die übrigen Keplerelemente $\bar{\alpha}_i \in \left\{\bar{a}, \bar{e}, \bar{M}\right\}$ gilt

$$\left(\frac{D\bar{\alpha}_i}{Dt}\right)_{ungestört} = 0 \text{ für } \bar{\alpha}_i \in \{\bar{a}, \bar{e}\} \text{ und}$$

$$\frac{D\bar{M}}{Dt} = n\,,\ n \text{ mittlere Bewegung.} \tag{25}$$

Weiter ist jetzt

$$F_{\bar{\bar{\alpha}}} := \left(\nabla_{\mathbf{r}}\left(\tilde{R} + U_Z + \mathbf{\Phi}\right) + \nabla_{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{n}}\right) \cdot \nabla_{\bar{\bar{\alpha}}}\mathbf{x}\,. \tag{26}$$

Aus der impliziten Gestalt der Störungsgleichungen im Galilei-System

$$\bar{\Psi}^{-1} F_{\bar{\bar{\alpha}}} = \frac{D\bar{\bar{\alpha}}}{Dt} - \left(\frac{D\bar{\bar{\alpha}}}{Dt}\right)_{ungestört}$$

$$\Rightarrow\ \bar{\Psi}^{-1}\left\{\nabla_{\bar{\bar{\alpha}}}\left(\tilde{R} + U_Z + \mathbf{\Phi}\right) + \bar{\mathbf{n}}\right\} = \frac{D\bar{\bar{\alpha}}}{Dt} - \left(\frac{D\bar{\bar{\alpha}}}{Dt}\right)_{ungestört} \tag{27}$$

ergibt sich als *Grundgleichung der Satellitengravimetrie*

$$\nabla_{\bar{\bar{\alpha}}}\left(\tilde{R} + U_Z + \mathbf{\Phi}\right)$$
$$= \bar{\Psi}\left\{\frac{D\bar{\bar{\alpha}}}{Dt} - \left(\frac{D\bar{\bar{\alpha}}}{Dt}\right)_{ungestört} - \nabla_{\bar{\bar{\alpha}}}\left(\nabla_{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{n}}\right)\right\}. \tag{28}$$

Sie enthält für den Fall verschwindender Rotation des Galileisystems die oben angegebene Grundgleichung der Gravitationsfeldbestimmung.

Anmerkung:
1. Die Matrix der Lagrange-Klammern ist jetzt im Galileisystem zu berechnen. Da ihre Elemente Differenzen von Skalarprodukten sind, sind sie unempfindlich gegen Drehungen; d. h., so lange sich das Galileisystem nur gegen das Inertialsystem dreht, bleiben die Lagrange-Klammern unverändert. Wenn sich das Galileisystem gleichförmig um eine feste Achse dreht, bleiben die Lagrange-Klammern stationär (Schneider 1992–1999, II § 21), weil mit dem sog. Jacobi-Integral (Schneider 2002) ein Erhaltungssatz besteht. Das ist hilfreich bei der Aufstellung der expliziten Störungsgleichungen.
2. Wenn man auch noch die stillschweigend getroffene Annahme fallen lassen will, dass sich das Galilei-System translatorisch nicht bewegt, dann ist in der Grundgleichung noch

$$U_F := \mathbf{x} \cdot \ddot{\bar{\mathbf{R}}}\ , \tag{29}$$

d. h. das Potential einer translatorischen Führungskraft (Schneider 1992–1999, II § 21) aufzunehmen. $\bar{\mathbf{R}}$ *bezeichnet den Ortsvektor des Ursprungs des Galilei-Systems in dem Bezugssystem, in dem sich das Galilei-System translatorisch bewegt. Die Grundgleichung der Satellitengravimetrie lautet dann*

$$\nabla_{\bar{\bar{\alpha}}}\left(\tilde{R} + U_F + U_Z + \mathbf{\Phi}\right)$$
$$= \bar{\Psi}\left\{\frac{D\bar{\bar{\alpha}}}{Dt} - \left(\frac{D\bar{\bar{\alpha}}}{Dt}\right)_{ungestört} - \nabla_{\bar{\bar{\alpha}}}\left(\nabla_{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{n}}\right)\right\}. \tag{30}$$

In der vorliegenden Form ist die Grundgleichung noch nicht befriedigend, ist man doch am Gradienten des Schwerepotentials, gebildet nach dem Ortsvektor $\mathbf{r}$, interessiert und nicht nach den α_j. Man kann aber $\nabla_{\bar{\bar{\alpha}}}\left(\tilde{R} + U_F + U_Z + \mathbf{\Phi}\right)$ wie folgt umschreiben

$$\nabla_{\mathbf{r}}\left(\tilde{R} + U_F + U_Z + \mathbf{\Phi}\right) = \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial\left(\tilde{R} + U_F + U_Z + \mathbf{\Phi}\right)}{\partial\alpha_j} \nabla_{\mathbf{r}}\alpha_j\ , \tag{31}$$

womit dann für die *Schwerebeschleunigung* folgt

$$\frac{\mathbf{S}}{m} = \nabla_{\mathbf{r}} U_0 + \nabla_{\mathbf{r}}\left(\tilde{R} + U_F + U_Z + \mathbf{\Phi}\right). \tag{32}$$

Anmerkung:
Eine andere Möglichkeit der Nutzung der Ableitungen $\partial\tilde{R}/\partial\alpha_j$ *wird in (Schneider 2002) angesprochen. Sie geht von der Entwicklung der Störungsfunktion* $\tilde{R}$ *nach den Bahnelementen aus, in der die geodätisch interessie-*

renden Potentialkoeffizienten C_{lm}, S_{lm} in linearer Form auftreten. Vorteilhaft ist darüber hinaus, dass diese Entwicklung (Schneider 1992–1999, IV § 53) in ihrer Abhängigkeit von den Bahnelementen weitgehend faktorisiert ist.

Die Eulersche Kreiselbeschleunigung ist in dieser Variante aus den Messungen herausgenommen. Auch wird man die Potentiale $U_F + \Phi$ herausnehmen, so dass folgt

$$\frac{\mathbf{S}}{m} = \nabla_{\mathbf{r}}\left(\tilde{R} + U_Z\right). \tag{33}$$

Dazu benötigt man den Bahn- und Geschwindigkeitsverlauf der Satellitenbewegung im Galilei-System, dem ITRS. Erfolgte die Bahnbestimmung im ICRS, so ist das Ergebnis ins ITRS zu transformieren

$$\mathbf{r}(t),\ \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \xrightarrow{\text{Drehtransformation } \mathbf{D}} \mathbf{x}(t),\ \frac{D\mathbf{x}(t)}{Dt} \tag{34}$$

Die längs der Satellitenbahn erhaltene Schwerefeldstärke kann dann nach Kugelflächenfunktionen entwickelt werden und diese Reihe in vielfältiger Weise genutzt werden. Zufolge der großen Bahnneigung der Bahnen von CHAMP, GRACE und GOCE wird der Außenraum der Erde im Flugbereich rasch überdeckt und damit ein altes Problem der Fluggravimetrie, die Lückenhaftigkeit in der Datenverteilung, gelöst. Und es wird die Zeitveränderlichkeit des äußeren Schwerefeldes mit guter Zeitauflösung bestimmbar.

3 Ergänzende Bemerkungen zur Schwerefeldbestimmung

Das vorgestellte Verfahren der Schwerefeldbestimmung basierend auf impliziten Störungsgleichungen für gestörte Keplerbahnen ermöglicht die Berechnung der Schwerebeschleunigung entlang der aktuellen Satellitenbahn. Es nutzt konsequent die Messsituation, wie sie in den neueren Satellitenmissionen CHAMP, GRACE (www.gfz-Potsdam.de) und GOCE (Müller 2001) gegeben ist bzw. sein wird. Die angegebene Grundgleichung ist allgemein genug, um auch andere als die klassischen Keplerelemente als bahnbeschreibende Variablen verwenden zu können, wie sie aus der Himmelsmechanik bekannt sind.

Das Verfahren benötigt keine explizit ausgearbeitete Bahntheorie und auch keine numerisch erzeugten Ephemeriden, wie es in vielen anderen Verfahren erforderlich ist. Das geschilderte Verfahren ist im Rahmen der Newtonschen Gravitationstheorie und Mechanik ausgearbeitet worden. Angesichts der Entwicklung der Messgenauigkeiten dürfte es erforderlich werden, die Satellitengravimetrie im Rahmen der Einsteinschen Gravitationstheorie (Schneider 1992–1999, III) weiter zu entwickeln. Damit einher geht eine Umdeutung der Gravitationskraft in die Krümmung der vierdimensionalen Raumzeit. Auch die Frage der räumlichen und zeitlichen Konstanz der Newtonschen Gravitationskonstanten als dem wesentlichen Maßstabsfaktor wird sich erneut stellen. Das Ergebnis der Analyse der Lasermessungen zum Mond (Müller 1991, Reichhoff 1999, Müller et al. 2000) ist bisher eher unter dem Gesichtspunkt der Bestätigung der Einsteinschen Gravitationskonstanten gesehen worden, also als der zeitlichen Konstanz der (Newtonschen wie auch der Einsteinschen) Gravitationskonstanten denn als mögliches Indiz ihrer Veränderlichkeit. Dass sie zeitlich veränderlich sein könnte, sagt beispielsweise die von E. Schmutzer (Schmutzer 2002) ausgearbeitete fünfdimensionale Projektive Einheitliche Feldtheorie vorher, die in der Projektion in die vierdimensionale Raumzeit verallgemeinerte Einsteinsche Feld- und Bewegungsgleichungen sowie verallgemeinerte Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik ergibt. Zudem resultiert eine Feldgleichung für ein neu hinzukommendes sog. skalarisches Feld σ, das zu einer relativen zeitlichen Änderungsrate

$$\frac{1}{G}\frac{dG}{dt} = \frac{1+1/\sigma^2}{1-1/\sigma^2}\frac{d\ln\sigma}{dt} \tag{35}$$

der Newtonschen Gravitationskonstanten G führt, und zwar mit einem numerischen Wert, der durchaus in der Reichweite der Analyse der Lasermesssungen (Müller 1991, Reichhoff 1999, Müller et al. 2000) zum Mond liegt, vielleicht auch in der der Lasermessung nach künstlichen Satelliten. Neuere Bestimmungen (Williams et al. 2001) von $\dot{G}/G$ ziehen freilich noch engere Grenzen für eine mögliche zeitliche Änderung von G als es in (Reichhoff 1999, Müller et al. 2000) der Fall ist.

4 Satellitengradiometrie

Das geschilderte Verfahren der Schwerefeldbestimmung ist zunächst zugeschnitten auf die Situation, wie sie in der CHAMP-Mission vorliegt. Die GRACE-Mission bringt zwei praktisch identische Satelliten für die Gravitations-/Schwerefeldbestimmung ins Spiel sowie gegenseitige Abstandsmessungen hoher Genauigkeit der in niedrigen Umlaufbahnen (Low-low SST) plazierten Satelliten. Das ermöglicht, die räumliche Feldstruktur zu bestimmen. Die GOCE-Mission (Müller 2001) zielt unmittelbar auf diese Struktur ab, d. h. auf die Messung des räumlichen Gradienten $\nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{r}}U_G$ des Gravitations- bzw. Schwerefeldes. Wie man in den Fällen GRACE und

GOCE die impliziten Störungsgleichungen verwenden kann, ist in (Schneider 2002) dargestellt. Hier soll noch ein anderes Konzept zur Nutzung der SST-Messungen vorgestellt werden.

Betrachtet sei also die Relativbewegung zweier Erdsatelliten A und B. Ihre Bewegungsgleichungen im ICRS

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_i, t) \tag{36a}$$

$$i = A, B \tag{36b}$$

können durch die Variablensubstitutionen

$$\mathbf{v}_i := \dot{\mathbf{r}}_i$$

in das System von Differentialgleichungen 1. Ordnung in den Zeitableitungen

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} \\ \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} \\ \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} \\ \frac{d\mathbf{v}_B}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_A \\ \mathbf{v}_B \\ \mathbf{f}_A(\mathbf{r}_A, t) \\ \mathbf{f}_B(\mathbf{r}_B, t) \end{pmatrix} \tag{37}$$

übergeführt werden. Dieses System wird gelöst durch die *LIE-Reihen* (Gröbner 1967, Schneider 1992–1999, IV § 61) für die Einzelbewegungen, unterstellt man keine Wechselwirkung zwischen den Satelliten,

$$\mathbf{r}_i(t) = \left(\exp(tD)\mathbf{r}_i\right)_0 \tag{38}$$

mit dem *Lie-Operator* (Gröbner 1967)

$$D := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=A}^{B} \mathbf{v}_j \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} + \mathbf{f}_j \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j} \quad . \tag{39}$$

Für den **Abstand**

$$\begin{aligned} &\Delta(\mathbf{r}_A(t), \mathbf{r}_B(t)) := \left|\mathbf{r}_B(t) - \mathbf{r}_A(t)\right| =: \left|\vec{\Delta}\right| =: \left|\Delta\vec{\Delta}_0\right| \\ &\vec{\Delta}_0 \quad \text{Richtung von A nach B} \end{aligned} \tag{40}$$

der beiden Satelliten als testbares Funktional der Relativbewegung besteht nach dem *LIEschen Vertauschungssatz* (Schneider 1992–1999, I § 13) die Lie-Reihe

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}_A(t), \mathbf{r}_B(t)) &= \left(\exp(t - t_0 D)\Delta\right)_0 \\ &= \Delta_0 + \frac{t - t_0}{1!}(D\Delta)_0 + \frac{(t - t_0)^2}{2!}(D^2\Delta)_0 + \ldots , \end{aligned} \tag{41}$$

worin sich die Reihenkoeffizienten durch Anwendung des oben erklärten Lie-Operators ergeben zu

$$\begin{aligned} D\Delta &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=A}^{B} \mathbf{v}_j \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} + \mathbf{f}_j \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j}\right)\Delta \\ &= \sum_{j=A}^{B} \mathbf{v}_j \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j}\Delta = \frac{\dot{\vec{\Delta}} \cdot \vec{\Delta}}{\Delta} , \end{aligned} \tag{42}$$

$$D^2\Delta = \frac{\dot{\vec{\Delta}}^2}{\Delta} - \frac{\left(\dot{\vec{\Delta}} \cdot \vec{\Delta}\right)^2}{\Delta^3} + \frac{\vec{\Delta} \cdot (\mathbf{f}_B - \mathbf{f}_A)}{\Delta}\Delta , \tag{43}$$

$$\begin{aligned} D^3\Delta &= \vec{\Delta}_0 \cdot \left(\frac{\partial(\mathbf{f}_B - \mathbf{f}_A)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_B}{\partial \mathbf{r}_B} \cdot \mathbf{v}_B - \frac{\partial \mathbf{f}_A}{\partial \mathbf{r}_A} \cdot \mathbf{v}_A\right) \\ &\quad + 3\frac{\dot{\vec{\Delta}} - \dot{\Delta}\vec{\Delta}_0}{\Delta} \cdot (\mathbf{f}_B - \mathbf{f}_A) - 3\dot{\Delta}\frac{\dot{\vec{\Delta}}^2 - \dot{\Delta}^2}{\Delta^2} \end{aligned} \tag{44}$$

usw. Diese Lie-Reihenkoeffizienten sind für den Anfangszeitpunkt t_0 zu berechnen (Index $|_0$).

Nimmt man die gemessenen nicht-gravitativen bzw. modellierbaren Kraftkomponenten aus den $\mathbf{f}_i$ heraus, so verbleiben reduzierte Inhomogenitäten in den Bewegungsgleichungen

$$\mathbf{f}_i \xrightarrow{\text{gemessene/modellierte Kräfte}} \mathbf{f}_i^{red} =: \mathbf{g}_i(\mathbf{r}_i, t) , \tag{45}$$

so dass beispielsweise für den zweiten Koeffizienten folgt

$$D^2\Delta = \frac{\dot{\vec{\Delta}}^2}{\Delta} - \frac{\left(\dot{\vec{\Delta}} \cdot \vec{\Delta}\right)^2}{\Delta^3} + \frac{\vec{\Delta} \cdot (\mathbf{g}_B - \mathbf{g}_A)}{\Delta} \quad . \tag{46}$$

Darin bedeutet

$$\frac{\vec{\Delta} \cdot (\mathbf{g}_B - \mathbf{g}_A)}{\Delta} = \vec{\Delta}_0 \cdot (\mathbf{g}_B - \mathbf{g}_A) \tag{47}$$

den räumlichen Unterschied der Gravitationsfeldstärken an den Satellitenorten $\mathbf{r}_B(t)$ und $\mathbf{r}_A(t)$. Der dritte Koeffizient $D^3\Delta$ enthält in den Summanden

$$\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \mathbf{v}_i \equiv \nabla_{\mathbf{r}_i}\mathbf{g}_i(\mathbf{r}_i, t) = \nabla_{\mathbf{r}_i}\nabla_{\mathbf{r}_i}U_G(\mathbf{r}_i, t) \equiv \left(\frac{\partial^2 U_G(x_1^i, x_2^i, x_3^i, t)}{\partial x_j^i \partial x_k^i}\right) \tag{48}$$

die zweiten partiellen Ableitungen des Außenraumpotentials der Erde als Maße der lokalen räumlichen Inhomogenitäten an den Orten $\mathbf{r}_B(t)$ und $\mathbf{r}_A(t)$. Analog könnte man nach dem Lieschen Vertauschungssatz

$$A\left(\vec{\Delta}(t),t\right)=\left(\left(\exp tD\right)A\right)_0 \tag{49}$$

für ein testbares Funkional A auch die gemessenen zweiten Ableitungen als die testbaren Funktionale behandeln, was hier nicht weiter verfolgt werden soll.

Es muss bei diesem Vorgehen freilich darauf hingewiesen werden, dass die Lie-Reihen ein endliches Konvergenzintervall haben, man also bei längeren Zeitspannen diese möglicherweise zu unterteilen und die Lie-Reihen mehrfach analytisch fortzusetzen hat.

5 Schlussbemerkung

Die in den neueren Satellitenmissionen CHAMP, GRACE und GOCE anfallenden Messgrößen, die GPS-Bahnverfolgungsdaten eingeschlossen, lassen sich unter Verwendung von Grundlagen der himmelsmechanischen Störungstheorie (implizite Störungsgleichungen, Liescher Vertauschungssatz) in Aussagen über das Gravitations- bzw. Schwerefeld der Erde und dessen räumliche und auch zeitliche Struktur in anderer Weise umsetzen als es bisher in der Satellitengeodäsie der Fall war. Bisher musste man sich fast ausnahmslos auf die explizit analytisch/numerisch ausgearbeiteten Bahntheorien in Kombination mit dem Verfahren der differentiellen Korrektur von Parametern stützen (Schneider 1992–1999, IV §§ 73–74). Und man war dabei angewiesen auf eine brauchbare Verteilung der mittleren Bahnneigungen der geodätisch genutzten Satelliten, die selten für geodätische Zielsetzungen vorgesehen waren. Hinzu kam die in der Regel stark lückenhafte Erfassung der Bahn. Diese Beschränkungen sind jetzt praktisch entfallen mit der Folge, dass das allgemeine Bahn- und Parameterbestimmungsproblem sich anders stellt als bisher. Das wird die Methodik erheblich wandeln, die Bahn als Zwischenunbekannte jeglicher Parameterbestimmung ist jetzt losgelöst von dieser bestimmbar.

Das vorgeschlagene Verfahren ist in Simulationsrechnungen und in der Anwendung auf Echtdaten noch zu testen. Dabei ist zu prüfen, ob die angesprochene Iteration (21) konvergiert.

Literatur

Gröbner W.: Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen, VEB Deutscher Verlag d. Wissenschaften, Berlin 1967.

Müller J.: Analyse von Lasermessungen zum Mond im Rahmen einer post-Newtonschen Theorie, Veröff. d. Dt. Geod. Komm., C 383, München 1991.

Müller J.: Die Satellitengradiometriemission GOCE – Theorie, technische Realisierung und wissenschaftliche Nutzung, Veröff. d. Dt. Geod. Komm., C541 München 2001.

Müller J., Egger D., Reichhoff B., Schneider M., Schreiber U.: Lunar Laser Ranging at its Best. In: Towards an Integrated Global Geodetic Observing System (IGGOS), Proceedings of the IAG Section II Symposium, held in Munich, Germany, Oct. 5–9, 1998, IAG Symposia, Vol. 120, P. 161–164, Springer Verlag, 2000.

Müller J., Schneider M., Soffel M., Ruder H.: Testing Einstein´s Theory of Gravity by analyzing Lunar Laser Ranging Data, Astrophys. J., No. 2, 1991.

Reichhoff B.: Verfeinerung und objektorientierte Implementierung eines Modells zur Nutzung von Lasermessungen zum Mond, Veröff. d. Dt. Geod. Komm., C 512, München 1999.

Schmutzer E.: The cosmological influence on matter (cosmic objects, dark matter and particles) predicted by the 5-dimensional projective unified field theory. In: Advances in the interplay between quantum and gravity physics, ed. By P. G. Bergmann and V. de Sabbata, Kluwer Academic Publishers 2002.

Schneider M.: Himmelsmechanik, Bde. I–IV, Bibiographisches Institut Mannheim und Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg 1992–1999.

Schneider M.: Zur Methodik der Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten, Veröff. des Instituts für Astronomische und Physikalische Geodäsie/Forschungseinrichtung der TU München. IAPG/FESG No. 15, 2002.

Soffel M. H.: Relativity in Astronomy, Celestial Mechanics and Geodesy, Springer Verlag, Berlin 1989.

Soffel M. H., Herold H., Ruder H., Schneider M.: Relativistic theory of gravimetric measurements and definition or the geoid, manuscripta geodaetica, vol. 13, p. 143–146, Springer Verlag, Berlin 1988a.

Soffel M. H., Herold H. Ruder H., Schneider M.: Relativistic geodesy: The concept of asymptotically fixed reference frames, manuscripta geodaetica, Vol. 13, p. 139–142, Springer Verlag, Berlin 1988b.

Torge W.: Gravimetry, de Gruyter Verlag, Berlin 1989.

Williams J. G., Boggs D. H., Dickey J. O., Folkner W. M.: Lunar Laser Tests of Gravitational Physics, submitted to World Scientific, 2001.

Anschrift des Autors:
Univ.-Prof. i. R. Dr. rer. nat. Manfred Schneider
Hoppestraße 18
93049 Regensburg
mxsx.tum@t-online.de