

# Zur statistischen Begründung des Regressionsmodells der balancierten Ausgleichungsrechnung

Georg Kampmann und Bernd Krause

## Zusammenfassung

Für die Methode der balancierten Ausgleichung wird ein Modell vorgestellt, das die statistischen und geometrischen Anforderungen an die Ausgleichung widerspruchsfrei vereinigt. Dies wird möglich, wenn anstelle einer Normalverteilung für die Residuen die LAPLACE-Verteilung angenommen wird. Weil diese in einem zweistufigen Zufallsprozess durch normalverteilte Residuen mit exponentialverteilten Streuungen erzeugt werden kann, lassen sich für die Residuen lineare Schätzfunktionen begründen. Es wird explizit angegeben, wie die Varianz der darauf beruhenden Schätzungen für die Beobachtungsstreuung  $\sigma^2$  sowohl von der Geometrie des Beobachtungsdesigns als auch von den statistischen Eigenschaften der Beobachtungen abhängt. Durch geeignete Wahl der Beobachtungsgewichte kann diese Varianz minimiert werden. Vorteilhafter ist es aber, diese Freiheit zur Balancierung der statistischen Eigenschaften des ausgeglichenen Modells zu nutzen.

## Summary

*A model for balanced least-squares adjustment is proposed. This unifies the statistical and geometrical needs of the adjustment. The usual normal distribution for the residuals is replaced by the Laplacian distribution with variance  $\sigma^2$ . Since this can be done by entering normal distributed residuals with exponential distributed variances linear estimations of the residuals are justified. Based on these estimations we derive an expression for the variance of the  $\sigma^2$  estimations which shows how it depends on the geometrical and statistical properties of the observations. To minimize this estimation variance one has to choose special observation weights. However, it is more reasonable to select these weights so that the statistical behaviour of the fitted model becomes balanced.*

## 1 Einführung

Publikationen zur balancierten Ausgleichung (Kampmann und Krause 1996, Jurisch und Kampmann 1997, Kampmann 1997, Kampmann 1998, Jurisch und Kampmann 1998a, Jurisch und Kampmann 1998b, Jurisch und Kampmann 1999) begründen, warum die geometrischen Eigenschaften des Beobachtungsdesigns bei der Ausgleichungsrechnung berücksichtigt werden müssen. Grundidee der balancierten Ausgleichung ist es daher, diese geometrischen Vorgaben der Ausgleichungsaufgabe durch Balancierungsgewichte  $p_{G_i}$  einzubeziehen. Diese werden den einzelnen Beobachtungen zugeordnet,

um dadurch jeder Beobachtung den gleichen Einfluss auf das Resultat der Ausgleichung einzuräumen. Dieses Vorgehen hat sich bei vielen praktischen und angewandten Aufgaben insbesondere auch zur Aufdeckung von Ausreißern bewährt.

Dem steht aber bisher ein noch unzureichend begründetes statistisches Konzept gegenüber. Betrachtet wird bei der balancierten Ausgleichung das klassische Gauß-Markov-Modell

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{l} + \mathbf{v}$$

$$\text{mit } \mathbf{v} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{P}_G^{-1}), \quad \mathbf{P}_G^{-1} = \text{diag}(p_{G_1}^{-1}, \dots, p_{G_n}^{-1}) \quad (1)$$

zur vermittelnden Ausgleichung des Vektors  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$  von  $n$  normalverteilten Beobachtungen. Die Designmatrix  $\mathbf{A}$  ist dabei eine  $(n, u)$  Matrix mit vollem Rang,  $\text{rg } \mathbf{A} = u$ , und  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^u$  ein Vektor unbekannter, aber fester Parameter. Balancierung bedeutet, dass abhängig von der durch die Designmatrix  $\mathbf{A}$  beschriebenen Geometrie Balancierungsgewichte  $p_{G_i}$  bestimmt werden, mit denen die zugehörige Hat-Matrix

$$\mathbf{H} = \left( h_{ij} \right)_{i,j=1,\dots,n} = \mathbf{H}(\mathbf{P}_G) = \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_G \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_G \quad (2)$$

für  $i = 1, \dots, n$  jeweils die gleichen Hauptdiagonalelemente mit dem Wert

$$h_{ii} = h_{ii}(\mathbf{P}_G) = \frac{u}{n} \quad (3)$$

erhält. Die Hat-Matrix projiziert die Beobachtungen  $\mathbf{l}$  auf die ausgeglichenen Beobachtungen  $\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{H}\mathbf{l}$ . Durch die Balancierung erhält dann auch die Matrix  $(\mathbf{I} - \mathbf{H})$ , mit der die Residuen  $\mathbf{v}$  linear aus den Beobachtungen geschätzt werden,  $-\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{l}$ , identische Hauptdiagonalelemente mit dem Wert  $1 - h_{ii} = \frac{n-u}{n}$ . Dabei bezeichnet  $\mathbf{I}$  jeweils die Einheitsmatrix.

Es bleibt bei diesem Vorgehen aber offen, warum in dem statistischen Modell (1) die Verhältnisse der Varianzen

$$\sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{p_{G_i}} \quad (4)$$

der einzelnen Beobachtungen durch die aus der spaltenregulären Designmatrix  $\mathbf{A}$  bestimmten Balancierungs-

gewichtete  $p_{G_i}$  gegeben sein sollen, die ja vom Zufallsprozess der Beobachtung völlig unabhängig sind. Mehr noch, sind für die einzelnen Beobachtungen a priori Gewichte  $p_i$  für die Beobachtungsfehler bekannt, so werden diese bei der balancierten Ausgleichung mit den Balancierungsgewichten  $p_{G_i}$  überlagert. Dabei wird zuerst durch Multiplikation mit  $\sqrt{p_i}$  den Beobachtungsgleichungen die einheitliche Varianz der Gewichtseinheit  $\sigma^2$  zugeordnet. Danach erfolgt dann mit der Methode der kleinsten Quadrate die Ausgleichung mit den Balancierungsgewichten  $p_{G_i}$ .

Die auf diese Weise zu Tage tretende Diskrepanz zwischen den statistischen und geometrischen Eigenschaften der Ausgleichungsaufgabe soll mit diesem Beitrag aufgelöst werden. Es soll ein plausibles Ausgleichungsmodell vorgestellt werden, bei dem die balancierte Ausgleichung die in einem wohl definierten Sinne optimale lineare Schätzmethode darstellt.

## 2 Regressionsmodell der balancierten Ausgleichung

Abweichend vom Modell (1) wird für das hier zu untersuchende Modell

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{I} + \mathbf{v} \quad \text{mit} \quad v_i \sim L(\lambda) \quad (5)$$

vorausgesetzt, dass die stochastisch unabhängigen Residuen  $v_i$  nicht mehr normalverteilt sind, sondern einer LAPLACE-Verteilung mit dem Parameter  $\lambda > 0$  genügen,  $V = v_i - L(\lambda)$ . Deren Verteilungsdichte ist durch  $f_V(v) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|v|}$  gegeben. Diese Verteilung wird mitunter auch als doppelte Exponentialverteilung bezeichnet.

Für die Verwendung der LAPLACE-Verteilung anstelle der Normalverteilung spricht die Beobachtung, dass bei Messprozessen nicht immer von einer gleich großen Zahl kleiner, unabhängiger Messfehler ausgegangen werden kann, die sich nach dem Zentralen Grenzwertsatz zu einem normalverteilten Gesamtfehler überlagern. Es ist nicht auszuschließen, dass reale Fehlerverteilungen auch durch größere Abweichungen, als es bei der Normalverteilung zu erwarten ist, charakterisiert sind (heavy tail distributions).

Wesentlich für das hier vorzustellende neue Regressionsmodell ist die Erkenntnis, dass sich LAPLACE-verteilte Zufallsgrößen in einem zweistufigen Zufallsexperiment aus exponential verteilten und normalverteilten Zufallsgrößen erzeugen lassen. In Lam und Goodman (2000) wird damit begründet, warum es gerade die LAPLACE-Verteilung ist, die bei den Koeffizienten der diskreten Cosinus-Transformation von Bilddaten auftritt.

Auch bei der hier zu gebenden Erklärung der Beobachtungsfehler kann davon ausgegangen werden,

dass die Anzahl der sich zu dem normalverteilten Gesamtfehler überlagernden Einzelfehler selbst zufällig ist. Damit stellt der zur i-ten Beobachtung gehörende Streuungsparameter  $\sigma_i^2$  selbst eine Zufallsgröße dar, deren Verteilung durch diese zufällige Anzahl der Einzelfehler bestimmt wird. Setzt man voraus, dass analog zur Verteilung einer zufälligen Lebensdauer mit konstanter Ausfallrate dieser Summationsprozess »ohne Gedächtnis«<sup>1</sup> ist, dann kann für den Streuungsparameter näherungsweise eine Exponentialverteilung angenommen werden.

Der in Lam und Goodman (2000) gegebene Beweis, dass bei diesem zweistufigen Zufallsprozess die resultierende Zufallsgröße einer LAPLACE-Verteilung genügt, beruht auf der expliziten Berechnung der resultierenden Dichtefunktion durch die etwas aufwändige analytische Auswertung des Integrals über das Produkt der Dichtefunktionen beider Zufallsgrößen. Hier soll diese Aussage etwas einfacher mit Hilfe der momenterzeugenden Funktionen bewiesen werden.

### Satz

Ist  $\sigma^2$  eine mit dem Parameter  $\mu > 0$  exponentialverteilte Zufallsgröße (mit der Verteilungsdichte  $f_{\sigma^2}(s^2) = \mu e^{-\mu s^2}$  für  $s^2 > 0$ ) und wird  $X$  als eine mit diesem Parameter  $\sigma^2$  normalverteilte Zufallsgröße bestimmt,  $X \sim N(0, \sigma^2)$ , dann ist die bei diesem zweistufigen Zufallsversuch entstehende Zufallsgröße  $V = X$  LAPLACE-verteilt mit dem Parameter  $\lambda = \sqrt{2\mu}$ .

### Beweis

Die momenterzeugende Funktion einer beliebigen Zufallsgröße  $Y$  ist allgemein durch den von  $t \in \mathbb{R}$  abhängigen Erwartungswert  $M_Y(t) = \mathbb{E}_Y(e^{tY})$  erklärt und muss als differenzierbare Funktion von  $t$  in einer Umgebung des Nullpunktes definiert sein (Koch 1997). Für die momenterzeugende Funktion der im Satz beschriebenen, aus zwei Zufallsexperimenten gewonnenen Zufallsgröße  $V$  gilt daher

$$M_V(t) = \mathbb{E}(e^{tV}) = \mathbb{E}_{\sigma^2} \mathbb{E}_X(e^{tx}). \quad (6)$$

Die Berechnung dieser Erwartungswerte erfolgt durch die Integration

$$M_V(t) = \int_0^\infty \left( \mu e^{-\mu s^2} \int_{-\infty}^\infty e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s^2}} dx \right) d(s^2). \quad (7)$$

<sup>1</sup> Hier ist eine Analogie zur zufälligen Lebensdauer eines ausfallgefährdeten Bauteils im Rahmen der Zuverlässigkeitstheorie angesprochen. Unter Gedächtnislosigkeit versteht man dort den Umstand, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit in jedem (kleinen) Zeitintervall unabhängig von der bis dahin erreichten Lebensdauer ist und allein von der Länge dieses Zeitintervalls abhängt.

Das innere Integral ist die etwa aus Koch (1997) bekannte momenterzeugende Funktion  $M_X(t) = e^{\mu_X t + 0.5t^2\sigma_X^2}$  einer normalverteilten Zufallsgröße  $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ . Damit wird für alle  $t$  aus einer Umgebung des Nullpunktes mit  $|t| < \sqrt{2\mu}$

$$M_V(t) = \int_0^\infty \left( \mu e^{-\mu s^2} e^{\frac{1}{2}t^2 s^2} \right) d(s^2) = \frac{2\mu}{2\mu - t^2}. \quad (8)$$

Diese Funktion stimmt aber mit der momenterzeugenden Funktion einer LAPLACE-verteilten Zufallsgröße  $V \sim L(\lambda)$

$$\begin{aligned} M_V(t) &= \mathbb{E}(e^{tV}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tv} \cdot \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|v|} dv \\ &= \frac{\lambda}{2} \left( \int_{-\infty}^0 e^{(t+\lambda)v} dv + \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)v} dv \right) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - t^2} \end{aligned} \quad (9)$$

überein, wenn  $\lambda = \sqrt{2\mu}$  ist. Weil aber aus der Übereinstimmung der momenterzeugenden Funktionen zweier Zufallsgrößen die Gleichheit ihrer Verteilungen folgt, ist damit der Satz bewiesen.

Mit der balancierten Ausgleichung wird das im obigen Satz beschriebene zweistufige Zufallsexperiment zur Bestimmung der Residuen nachgebildet. Die Streuungen für die (im zweiten Schritt) als normalverteilte Zufallsgrößen angesehenen Beobachtungen können nach diesem Modell (im ersten Schritt) zufällig, als unabhängige Zufallsgrößen den einzelnen Beobachtungen zugeordnet werden. Solange diese Zuordnung der Hypothese der Exponentialverteilung nicht widerspricht, ist jede auch willkürlich bestimmte Verteilung der Beobachtungsgewichte gleichberechtigt. Dies rechtfertigt die Verwendung der aus den Eigenschaften des Beobachtungsdesigns begründeten Balancierungsgewichte, wenn diese entsprechende statistische Tests bestanden haben.

Im vorgestellten Modell (5) stimmt dann die für die LAPLACE-verteilten Residuen  $V$  gültige Varianz

$$\text{Var}(V) = \frac{2}{\lambda^2} = \frac{1}{\mu} = \mathbb{E}(\sigma_i^2) \text{ mit dem Erwartungswert der}$$

den einzelnen Beobachtungen zufällig zugeordneten Streuungen  $\sigma_i^2$  überein. Anders als im Modell (1) sind die individuellen Streuungen  $\sigma_i^2 = \sigma^2 / p_{G_i}$  nun keine in ihren Verhältnissen fest vorgegebenen Größen mehr, sondern werden im Modell (5) als unabhängige, mit dem Erwartungswert  $\sigma^2$  exponentialverteilte Zufallsgrößen angesehen. Die eingangs angesprochene Diskrepanz zwischen den in Modell (1) als deterministische Größen aus  $A$  bestimmten Balancierungsgewichten  $p_{G_i}$  und den im Modell (5) durch den geschilderten Zufallsprozess erhaltenen Größen  $\sigma_i^2 / \sigma^2$  wird auf diese Weise aufgelöst. Die Bedingung dafür ist nur, dass die vorliegenden  $(p_{G_1}, \dots, p_{G_n})$  nicht von einer entsprechenden Stichprobe von  $n$  unabhängigen Zufallsgrößen  $\sigma_i^2 / \sigma^2$  unterschieden werden können. Für beide Modelle bleibt

der Streuungsparameter ( $\sigma^2$  bzw.  $1/\mu$ ) der einzige zu schätzende Verteilungsparameter.

Außerdem sind durch die Ausgleichung die  $u$  Komponenten des Parametervektors  $x \in \mathbb{R}^u$  und damit die im Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  zusammengefassten Residuen zu bestimmen. Als Maximum-Likelihood-Schätzung für die LAPLACE-verteilten Residuen  $v_i$  erhält man (Kampmann und Krause 1995) die als L1-Methode bekannte Forde rung

$$\sum_{i=1}^n |v_i| \rightarrow \min, \quad (10)$$

die auf die Lösung einer linearen Optimierungsaufgabe hinausläuft. Die so geschätzten Parameter und Residuen hängen dann aber nicht mehr linear von den Beobachtungen ab. Der Vorteil des vorgeschlagenen zweistufigen Verfahrens zur Realisierung des Modells (5) liegt aber gerade in der Linearität der zugehörigen Schätzfunktionen für die Residuen und damit der ausgeglichenen Beobachtungen. Diese linear aus den Beobachtungen geschätzten Residuen bilden dann die Grundlage für die Schätzungen der Modellstreuung  $\sigma^2$ .

### 3 Schätzung der Modellstreuung

Bekanntlich (vgl. etwa Grafarend und Schaffrin 1993) lassen sich bei spaltenregulärer Designmatrix  $A$  mit beliebiger regulärer Gewichtsmatrix  $P = \text{diag}(p_1, \dots, p_n)$ ,  $p_i > 0$ , und der Hat-Matrix

$$H = H(P) = A(A^T P A)^{-1} A^T P \quad (11)$$

die unbekannten Modellparameter  $x$ ,  $v$  und  $1$  erwartungstreue schätzen:

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P 1, \quad \hat{v} = (H - I) 1, \quad \hat{1} = H 1. \quad (12)$$

Dies folgt sofort aus der Tatsache, dass durch die Multiplikation mit der Hat-Matrix  $H$  jeder Vektor auf den von den Spalten von  $A$  aufgespannten Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  projiziert wird. Jede dieser Projektionsmatrizen  $H = (h_{ij})$  erfüllt dabei die Bedingungen

$$H^T = H, \quad PH = H^T P, \quad \text{tr}(H) = u, \quad 0 \leq h_{ii} \leq 1, \quad \hat{v} = (H - I) 1, \quad (13)$$

wobei  $\text{tr}(H) = \sum_{i=1}^n h_{ii}$  die Spur der Matrix bezeichnet.

Um die Übereinstimmung mit dem Modell (5) herzustellen, müssen die  $\sigma_i^2$  bzw. die Reziprokwerte der  $p_i$  exponentialverteilte Zufallsgrößen sein. Dies würde dann mit  $\alpha > 0$  auch auf beliebige Vielfache der Gewichte  $\alpha p_i$  zu-

treffen. Weil außerdem offenbar  $\mathbf{H}(\alpha\mathbf{P}) = \mathbf{H}(\mathbf{P})$  gilt, kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit von einer Normierung der positiven Gewichte  $p_i$  ausgegangen werden,

$$\sum_{i=1}^n p_i = n. \quad (14)$$

Für den Erwartungswert der quadratischen Form  $\mathbb{E}\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}$  gilt dann im Modell (5) mit  $\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{H} - \mathbf{I})\mathbf{l}$ , wegen (13) und  $\mathbf{v} = \mathbf{Ax} - \mathbf{l}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}} &= \mathbb{E}\mathbf{l}^T(\mathbf{I} - \mathbf{H})^T\mathbf{P}(\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{l} = \mathbb{E}\mathbf{l}^T(\mathbf{P} - \mathbf{PH})\mathbf{l} \\ &= \mathbb{E}\mathbf{v}^T\mathbf{P}(\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{v} \\ &= \text{tr}(\mathbf{P}(\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbb{E}\mathbf{v}\mathbf{v}^T) \\ &= \sigma^2 \text{tr}\mathbf{P}(\mathbf{I} - \mathbf{H}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n p_i (1 - h_{ii}), \end{aligned} \quad (15)$$

wobei  $\mathbb{E}\mathbf{l} = \mathbf{Ax}$  und

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mathbf{v}\mathbf{v}^T &= \mathbb{E}((\mathbf{Ax} - \mathbf{l})(\mathbf{Ax} - \mathbf{l})^T) = \mathbb{E}\mathbf{l}\mathbf{l}^T - \mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T \\ &= \text{Var}(\mathbf{l}) = \sigma^2\mathbf{I} \end{aligned} \quad (16)$$

benutzt wurde. Im Unterschied zum Modell (1) ist dabei hier im Modell (5) für die Varianz der Beobachtungen  $\text{Var}(\mathbf{l}) = \sigma^2\mathbf{I}$  eingesetzt worden. Aus (15) folgt somit, dass die Modellstreuung  $\sigma^2$  durch

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i (1 - h_{ii})} \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}} \quad (17)$$

erwartungstreue geschätzt werden kann.

Sowohl bei der Verwendung gleicher Beobachtungsgegewichte  $p_1 = \dots = p_n = 1$  als auch bei der Benutzung der die Balancierungsbedingung (3) erfüllenden Gewichte  $p_i = p_{G_i}$  ist (17) die bekannte Schätzfunktion

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-u} \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}. \quad (18)$$

Die zur Schätzung von  $\sigma^2$  in (17) verwendete quadratische Form in den  $\hat{\mathbf{v}}$  kann an Stelle von  $\mathbf{P}$  auch mit beliebigem  $\mathbf{Q} = \text{diag}(q_1, \dots, q_n)$  gebildet werden. Man erhält dann analog zu (17) die erwartungstreue Schätzfunktion

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\text{tr}((\mathbf{I} - \mathbf{H})^T \mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{H}))} \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{v}}. \quad (19)$$

Zur Herleitung dieser Schätzfunktion war für die zufälligen Residuen  $V = v_i$  nur die Existenz der benötigten Momente vorauszusetzen. Weitere Verteilungsannahmen

waren nicht nötig, das heißt, die Residuen können wie im Modell (5) auch als LAPLACE-verteilt angesehen werden.

Um nachfolgend die Varianz der Schätzfunktion  $\hat{\sigma}^2$  aus (17) bzw. (19) für beliebige symmetrische Verteilungen der Residuen  $V$  zu bestimmen, soll für die Momente

$$\mathbb{E}\mathbf{V} = 0, \quad \mathbb{E}\mathbf{V}^2 = \sigma^2, \quad \mathbb{E}\mathbf{V}^3 = 0, \quad \mathbb{E}\mathbf{V}^4 = K\sigma^4 \quad (20)$$

vorausgesetzt werden. Bei Normalverteilung ist der als Kurtosis bezeichnete Parameter  $K = 3$ , während bei der LAPLACE-Verteilung  $K = 6$  ist (Kampmann und Krause 1995).

### Satz

Es seien  $V_j, j = 1, \dots, n$  unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen mit den Momenten (20). Weiter sei  $\mathbf{C} = (c_{ij})$  eine Matrix, mit der aus den  $V_j$  der Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  gemäß  $X_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} V_j, i = 1, \dots, n$  gebildet wird,  $\mathbf{X} = \mathbf{CV}$ . Ferner sei  $\mathbf{Y}$  der Zufallsvektor  $\mathbf{Y} = (Y_1^2, \dots, Y_n^2)^T$ . Dann besitzen diese Zufallsvektoren die Erwartungswerte

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mathbf{X} &= \mu_{\mathbf{X}} = \mathbf{O}, \\ \mathbb{E}\mathbf{Y} &= \mu_{\mathbf{Y}} = \sigma^4 \left( (\mathbf{CC}^T)_{11}, (\mathbf{CC}^T)_{22}, \dots, (\mathbf{CC}^T)_{nn} \right)^T \end{aligned} \quad (21)$$

und die Varianz-Kovarianz-Matrizen

$$\begin{aligned} \text{Var} \mathbf{X} &= \Sigma_{\mathbf{X}} = \sigma^2 \mathbf{CC}^T, \\ \text{Var} \mathbf{Y} &= \Sigma_{\mathbf{Y}} = \sigma^4 \left( 2(\mathbf{CC}^T)^{(2)} + (K-3)\mathbf{C}^{(2)}(\mathbf{C}^{(2)})^T \right), \end{aligned} \quad (22)$$

wobei die Matrizen  $(\mathbf{CC}^T)^{(2)} = (\mathbf{CC}^T) * (\mathbf{CC}^T)$  und  $\mathbf{C}^{(2)} = \mathbf{C} * \mathbf{C}$  als HADARMAD-Produkte jeweils elementweise aus den Quadraten von  $(\mathbf{CC}^T)$  und  $\mathbf{C}$  bestehen.

Der Beweis dieses Satzes ist in Kampmann und Krause (2003) zu finden. Setzt man für die in diesem Satz wesentliche Transformationsmatrix  $\mathbf{C} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})$ , so lässt sich damit die Streuung der allgemeinen Schätzfunktion (19) nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz bestimmen:

$$\text{Var} \hat{\sigma}^2 = \text{Var} \left( \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{v}}}{\text{tr}((\mathbf{I} - \mathbf{H})^T \mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{H}))} \right) = \frac{\text{Var} \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{v}}}{\left( \text{tr}(\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}) \right)^2}. \quad (23)$$

Dies ist wegen

$$\text{Var}(\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{v}}) = \text{Var} \left( \sum_{i=1}^n q_i X_i^2 \right) = \text{Var} \left( \sum_{i=1}^n q_i Y_i \right) = \mathbf{q}^T \Sigma_{\mathbf{Y}} \mathbf{q} \quad (24)$$

und

$$\begin{aligned} (\text{tr}(\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}))^2 &= (\text{tr}(\mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{C}^T))^2 = \left( \sum_{i=1}^n q_i (\mathbf{C} \mathbf{C}^T)_{ii} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\sigma^4} \mathbf{q}^T \boldsymbol{\mu}_Y \boldsymbol{\mu}_Y^T \mathbf{q} \end{aligned} \quad (25)$$

ein Quotient von zwei positiv semidefiniten quadratischen Formen in den  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$ . Die Forderung, diese Streuung

$$\text{Var} \hat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{q}^T \Sigma_Y \mathbf{q}}{\mathbf{q}^T \boldsymbol{\mu}_Y \boldsymbol{\mu}_Y^T \mathbf{q}} \sigma^4 \quad (26)$$

zu minimieren, kann wegen der freien Skalierbarkeit von  $\mathbf{q}$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit unter der Voraussetzung  $\boldsymbol{\mu}_Y^T \mathbf{q} = 1$  erfolgen. Damit führt die Bestimmung von

$$\min_{\mathbf{q} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n} \frac{\mathbf{q}^T \Sigma_Y \mathbf{q}}{\mathbf{q}^T \boldsymbol{\mu}_Y \boldsymbol{\mu}_Y^T \mathbf{q}} = \min_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\mu}_Y^T \mathbf{q} = 1} \mathbf{q}^T \Sigma_Y \mathbf{q} \quad (27)$$

wegen der Symmetrie von  $\Sigma_Y$  und entsprechend der LAGRANGEschen Multiplikatorenregel mit dem Multiplikator  $\lambda$  auf die notwendigen Bedingungen

$$2 \Sigma_Y \mathbf{q} + \lambda \boldsymbol{\mu}_Y = \mathbf{0} \quad \text{mit } \boldsymbol{\mu}_Y^T \mathbf{q} = 1. \quad (28)$$

Ist die Matrix  $\Sigma_Y$  singulär und liegt  $\boldsymbol{\mu}_Y$  nicht in dem von den Spalten von  $\Sigma_Y$  aufgespannten Unterraum, dann hat das System (28) keine Lösung und der minimale Wert des Quotienten wird  $\frac{\mathbf{q}^T \Sigma_Y \mathbf{q}}{\mathbf{q}^T \boldsymbol{\mu}_Y \boldsymbol{\mu}_Y^T \mathbf{q}} = 0$ . Andernfalls besitzt (28) bei singulärem  $\Sigma_Y$  keine eindeutige Lösung und der minimale Wert von  $\text{Var} \hat{\sigma}^2$  ist direkt aus (26) zu bestimmen.

Ist die Matrix  $\Sigma_Y$  dagegen regulär, kann (28) direkt aufgelöst werden und es gilt

$$\mathbf{q}_{\min} = \frac{1}{\boldsymbol{\mu}_Y^T \Sigma_Y^{-1} \boldsymbol{\mu}_Y} \Sigma_Y^{-1} \boldsymbol{\mu}_Y. \quad (29)$$

Man erhält so schließlich den minimalen Wert der Varianz des Schätzers

$$\begin{aligned} \text{Var} \hat{\sigma}^2 &= \mathbf{q}_{\min}^T \Sigma_Y \mathbf{q}_{\min} \sigma^4 \\ &= \frac{\sigma^4}{(\boldsymbol{\mu}_Y^T \Sigma_Y^{-1} \boldsymbol{\mu}_Y)^2} (\Sigma_Y^{-1} \boldsymbol{\mu}_Y)^T \Sigma_Y (\Sigma_Y^{-1} \boldsymbol{\mu}_Y) \\ &= \frac{\sigma^4}{(\boldsymbol{\mu}_Y^T \Sigma_Y^{-1} \boldsymbol{\mu}_Y)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Damit ist der folgende Satz bewiesen.

### Satz

Es gelten die Voraussetzungen (20) für die Momente der Beobachtungen im Modell (5). Weiter sei  $\mathbf{H} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}$  die mit der positiven Diagonalmatrix  $\mathbf{P} = \text{diag}(p_1, \dots, p_n)$  gebildete Hat-Matrix und  $\mathbf{C} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})$  sowie  $\hat{\mathbf{v}} = -(\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{1}$  der linear und erwartungstreue aus den Beobachtungen  $\mathbf{l}$  des Modells geschätzte Residuenvektor. Dann gilt mit den Bezeichnungen

$$\boldsymbol{\mu}_Y = \sigma^2 \left( (\mathbf{C} \mathbf{C}^T)_{11}, (\mathbf{C} \mathbf{C}^T)_{22}, \dots, (\mathbf{C} \mathbf{C}^T)_{nn} \right)^T \quad (31)$$

$$\Sigma_Y = \sigma^4 \left( 2(\mathbf{C} \mathbf{C}^T)^{(2)} + (K-3)\mathbf{C}^{(2)}(\mathbf{C}^{(2)})^T \right) \quad (32)$$

und unter der Bedingung

$$\det \Sigma_Y \neq 0, \quad (33)$$

dass für

$$\mathbf{Q} = \text{diag} \mathbf{q}_{\min} = \frac{1}{\boldsymbol{\mu}_Y^T \Sigma_Y^{-1} \boldsymbol{\mu}_Y} \text{diag} \Sigma_Y^{-1} \boldsymbol{\mu}_Y \quad (34)$$

die Varianz der Schätzfunktion

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\text{tr}(\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C})} \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{v}} \quad (35)$$

minimal wird und den Wert  $\frac{\sigma^4}{\boldsymbol{\mu}_Y^T \Sigma_Y^{-1} \boldsymbol{\mu}_Y}$  annimmt.

Mit diesem Satz wird das bekannte Konzept der BLUE-Schätzfunktionen auf die Schätzung der Beobachtungsvarianz ausgedehnt, denn die Schätzfunktionen sind für  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{l}$  unverzerrt und linear und für  $\sigma^2$  von minimaler Varianz. Da der erreichbare minimale Wert von  $\text{Var} \hat{\sigma}^2$  bei gegebener Designmatrix und bekannter Kurtosis  $K$  allein von der Wahl der Gewichte  $p_1, \dots, p_n$  abhängt, ist es sinnvoll, nach der optimalen Wahl dieser Gewichte zu fragen. Die dazu nötige Maximierung von

$$\boldsymbol{\mu}_Y^T \Sigma_Y^{-1} \boldsymbol{\mu}_Y \rightarrow \max \quad (36)$$

gelingt nicht mehr als geschlossene Formel. Deutlich wird aber, dass tatsächlich, wie eingangs behauptet, die statistischen Eigenschaften der Schätzung wesentlich von den durch  $\boldsymbol{\mu}_Y$  und  $\Sigma_Y$  zum Ausdruck kommenden geometrischen Eigenschaften der Ausgleichsaufgabe abhängen. Dies soll für einen Spezialfall untersucht werden, in dem insbesondere die Abhängigkeit der Projektionsmatrizen  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{H}$  von den Gewichten explizit verfolgt werden kann.

#### 4 Der Fall $u + 1 = n$

Die Designmatrix  $\mathbf{A}$  im Modell (5) möge aus den  $n$  Zeilen  $\mathbf{a}_i^T \in \mathbb{R}^{n-1}$  bestehen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{pmatrix} \quad (37)$$

Die Lage des durch die Spalten von  $\mathbf{A}$  aufgespannten Teilraums von  $\mathbb{R}^n$  lässt sich allgemein durch die Plücker-Graßmann-Koordinaten beschreiben (Jurisch und Kampmann 2001). Bei  $u + 1 = n$  stimmen diese Koordinaten mit den  $n$  algebraischen Komplementen von  $\mathbf{A}$

$$D_i = (-1)^{n-i+1} \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1}^T \\ \mathbf{a}_{i+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{pmatrix} \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad (38)$$

überein. Der Vektor  $\mathbf{d}^T = (D_1, D_2, \dots, D_n)$  steht auf den Spalten von  $\mathbf{A}$  senkrecht, d.h.  $\mathbf{d}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}^T$ . Die Hat-Matrix ist dann  $\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{d}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{d}} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{d} \mathbf{d}^T$ , so dass die Matrix

$\mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{H}$  die Gestalt

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\mathbf{d}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{d}} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{d} \mathbf{d}^T = \frac{1}{\sum_{i=1}^n D_i^2} \begin{pmatrix} \frac{D_1^2}{p_1} & \frac{D_1 D_2}{p_1} & \dots & \frac{D_1 D_n}{p_1} \\ \frac{D_2 D_1}{p_2} & \frac{D_2^2}{p_2} & \dots & \frac{D_2 D_n}{p_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{D_n D_1}{p_n} & \frac{D_n D_2}{p_n} & \dots & \frac{D_n^2}{p_n} \end{pmatrix} \quad (39)$$

annimmt.

Für die zur Berechnung der Varianz von  $\hat{\sigma}^2$  erforderlichen Matrizen ergeben sich damit aus

$$\begin{aligned} \mathbf{CC}^T &= \frac{\mathbf{d}^T \mathbf{d}}{(\mathbf{d}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{d})^2} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{d} \mathbf{d}^T \mathbf{P}^{-1}, \\ \mathbf{C}^{(2)} &= \frac{1}{(\mathbf{d}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{d})^2} \mathbf{P}^{-2} \mathbf{d}^{(2)} \mathbf{d}^{(2)T} \end{aligned} \quad (40)$$

und

$$\begin{aligned} (\mathbf{CC}^T)^2 &= \frac{(\mathbf{d}^T \mathbf{d})^2}{(\mathbf{d}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{d})^4} \mathbf{P}^{-2} \mathbf{d}^{(2)} (\mathbf{d}^{(2)})^T \mathbf{P}^{-2}, \\ \mathbf{C}^{(2)} (\mathbf{C}^{(2)})^T &= \frac{(\mathbf{d}^{(2)})^T \mathbf{d}^{(2)}}{(\mathbf{d}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{d})^4} \mathbf{P}^{-2} \mathbf{d}^{(2)} (\mathbf{d}^{(2)})^T \mathbf{P}^{-2} \end{aligned} \quad (41)$$

die Formeln für

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \sigma^2 ((\mathbf{CC}^T)_{11}, (\mathbf{CC}^T)_{22}, \dots, (\mathbf{CC}^T)_{nn})^T \\ &= \sigma^2 \frac{\mathbf{d}^T \mathbf{d}}{(\mathbf{d}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{d})^2} \mathbf{P}^{-2} \mathbf{d}^{(2)} \end{aligned} \quad (42)$$

und die singuläre Matrix

$$\begin{aligned} \Sigma_Y &= \sigma^4 (2(\mathbf{CC}^T)^{(2)} + (K-3)\mathbf{C}^{(2)} (\mathbf{C}^{(2)})^T) \\ &= \frac{\sigma^4}{(\mathbf{d}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{d})^4} (2(\mathbf{d}^T \mathbf{d})^2 + (K-3)(\mathbf{d}^{(2)})^T \mathbf{d}^{(2)}) \\ &\quad \mathbf{P}^{-2} \mathbf{d}^{(2)} (\mathbf{d}^{(2)})^T \mathbf{P}^{-2}. \end{aligned} \quad (43)$$

Die Varianz jeder Schätzfunktion der Gestalt (19) ist dann nach (26)

$$\begin{aligned} \text{Var}\hat{\sigma}^2 &= \frac{\mathbf{q}^T \Sigma_Y \mathbf{q}}{\mathbf{q}^T \mu_Y \mu_Y^T \mathbf{q}} \sigma^4 = \left( 2 + (K-3) \frac{(\mathbf{d}^{(2)})^T \mathbf{d}^{(2)}}{(\mathbf{d}^T \mathbf{d})^2} \right) \sigma^4 \\ &= \left( 2 + (K-3) \frac{\sum_{i=1}^n D_i^4}{\left( \sum_{i=1}^n D_i^2 \right)^2} \right) \sigma^4 \end{aligned} \quad (44)$$

und somit nicht nur von den  $\mathbf{q}$ , sondern auch von der Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}$  unabhängig. Dennoch ist der Einfluss der Geometrie durch den Anteil  $(K-3) \frac{(\mathbf{d}^{(2)})^T \mathbf{d}^{(2)}}{(\mathbf{d}^T \mathbf{d})^2} \leq K-3$  in der obigen Formel gut interpretierbar. Ist die Voraussetzung der Normalverteilung exakt erfüllt ( $K = 3$ ), so liefert die obige Formel für die Varianz  $\text{Var}\hat{\sigma}^2 = 2\sigma^4$ . Dies steht im Einklang mit der bekannten Tatsache, dass dann die Zufallsgröße

$\frac{1}{n-u} \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$  einer  $\chi^2$ -Verteilung mit dem Freiheitsgrad  $n-u=1$  genügt und die Varianz  $2(n-u)=2$  besitzt. Nur in diesem Fall normalverteilter Residuen hängt also die Güte der Schätzung nicht von der in der Designmatrix  $\mathbf{A}$  enthaltenen geometrischen Konstellation ab. Dieser Umstand mag mit dazu beigetragen haben, dass in der Vergangenheit der Einfluss des Beobachtungsdesigns in vielen Untersuchungen zur Ausgleichsrechnung weitgehend vernachlässigt wurde.

## 5 Begründung der Balancierungsbedingung

Aus den bisherigen Untersuchungen ist deutlich geworden, dass es für die Wahl der Schätzfunktionen für  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{v}$  und  $\sigma^2$  im Modell (5) viele Möglichkeiten gibt. Auch die Suche nach einer Schätzung für die Modellstreuung  $\sigma^2$  mit minimaler Varianz führte entweder zu einer im Allgemeinen nicht auswertbaren Forderung ( $(\mu_Y^T \Sigma_Y^{-1} \mu_Y \rightarrow \max)$ ) oder wie im Fall  $u+1=n$  zu keiner weiteren Einschränkung für die Wahl der Gewichte in der Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}$ .

Die noch vorhandene Freiheit bei der Wahl der Beobachtungsgewichte soll deshalb dazu ausgenutzt werden, eine möglichst gute Übereinstimmung zwischen den Modellannahmen für  $\mathbf{l}$  und  $\mathbf{v}$  und den statistischen Eigenschaften der Schätzungen  $\hat{\mathbf{l}}$  und  $\hat{\mathbf{v}}$  zu erzielen. Wegen der Erwartungstreue dieser Schätzungen stehen dabei die Varianzen  $\text{Var } \hat{\mathbf{l}}_i$  und  $\text{Var } \hat{\mathbf{v}}_i$  im Mittelpunkt. Diese sollen bis auf einen konstanten Faktor möglichst gut mit den einheitlichen Beobachtungsvarianzen  $\text{Var } \mathbf{l}_i = \text{Var } \mathbf{v}_i = \sigma^2$  übereinstimmen. Das könnte dadurch erreicht werden, dass durch geeignete Wahl von  $\mathbf{P}$  die Hauptdiagonalelemente von

$$\text{Var } \hat{\mathbf{l}} = \sigma^2 \mathbf{H} \mathbf{H}^T \quad (45)$$

alle den gleichen Wert erhalten und somit für alle ausgeglichenen Beobachtungen entsprechend der Modellannahme die gleiche Varianz (Homoskedastizität) gewährleistet wäre. Allerdings würde sich dann wegen

$$\text{Var } \hat{\mathbf{v}} = \sigma^2 (\mathbf{I} - \mathbf{H})(\mathbf{I} - \mathbf{H})^T = \sigma^2 (\mathbf{I} - \mathbf{H} - \mathbf{H}^T + \mathbf{H} \mathbf{H}^T) \quad (46)$$

die im Modell vorausgesetzte Homoskedastizität der Residuen im Allgemeinen nicht auf die Verbesserungen übertragen. Fordert man dagegen umgekehrt die Gleichheit der Hauptdiagonalelemente von  $\mathbf{I} - \mathbf{H} - \mathbf{H}^T + \mathbf{H} \mathbf{H}^T$ , dann wird im Allgemeinen diese Eigenschaft für  $\mathbf{H} \mathbf{H}^T$  verloren gehen.

Der angestrebte ideale Zustand, dass ausgeglichene Beobachtungen und geschätzte Residuen jeweils untereinander die gleiche Varianz besitzen, tritt nur bei Beobachtungsdesigns auf, die von Haus aus balanciert sind. Das sind Beobachtungsdesigns, bei denen die Balancierungsbedingung (3) mit der Gewichtsmatrix  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_G = \mathbf{I}$  erfüllt ist und folglich wegen  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^T$  sowohl  $\text{Var } \hat{\mathbf{l}} = \sigma^2 \mathbf{H}$  als auch  $\text{Var } \hat{\mathbf{v}} = \sigma^2 (\mathbf{I} - \mathbf{H})$  gilt. Die Komponenten dieser Vektoren haben dann untereinander jeweils die gleiche Varianz

$$\text{Var } \hat{\mathbf{l}}_i = \frac{n}{u} \sigma^2 \quad \text{und} \quad \text{Var } \hat{\mathbf{v}}_i = \frac{n-u}{u} \sigma^2 \quad (47)$$

Im Allgemeinen kann man aber nur einen Kompromiss für die angestrebte Übereinstimmung der Relationen zwischen den Varianzen erwarten, eine Balance zwischen den beiden sich ausschließenden Idealzuständen für  $\mathbf{l}$  und  $\mathbf{v}$ .

Das eingangs dargestellte zweistufige Zufallsexperiment zur Realisierung des Modells (5) erlaubt es aber nun, diese gewünschte Übereinstimmung zwischen Modellannahme und den Eigenschaften der Schätzfunktionen  $\hat{\mathbf{l}}_i$  und  $\hat{\mathbf{v}}_i$  auch bei allgemeinen Beobachtungsdesigns zu erreichen. Das betrifft wie auch in (47) nicht die absoluten Werte der Varianzen, sondern die Relationen, die zwischen den einzelnen Beobachtungsvarianzen bestehen. Werden dazu die Beobachtungsgewichte in  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_G$  so festgelegt, dass die Balancierungsbedingung (3) erfüllt ist, und tritt dabei kein Widerspruch zu der Annahme auf, dass die darin enthaltenen  $p_i = p_{G_i}$  aus einem Zufallsexperiment mit unabhängigen exponentialverteilten  $\sigma_i^2$  gemäß

$$p_i = \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2} \quad \text{mit dem harmonischen Mittel } \sigma^2 = \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_j^2} \right)^{-1} \quad (48)$$

erzeugt wurden, dann stimmen wegen

$$\text{Var } \hat{\mathbf{l}} = \sigma^2 \mathbf{H} \mathbf{P} \quad \text{und} \quad \text{Var } \hat{\mathbf{v}} = \sigma^2 (\mathbf{I} - \mathbf{H}) \mathbf{P} \quad (49)$$

die Beobachtungsstreuungen  $\sigma_i^2$  analog zu (47) bestmöglich mit den Streuungen von  $\hat{\mathbf{l}}_i$  und  $\hat{\mathbf{v}}_i$  überein:

$$\text{Var } \hat{\mathbf{l}}_i = \frac{n}{u} \sigma_i^2 \quad \text{und} \quad \text{Var } \hat{\mathbf{v}}_i = \frac{n-u}{u} \sigma_i^2 \quad (50)$$

Insbesondere gilt dann auch die Zerlegung der Beobachtungsstreuung

$$\text{Var } \hat{\mathbf{l}}_i + \text{Var } \hat{\mathbf{v}}_i = \sigma_i^2 \quad \text{und} \quad \text{Var } \hat{\mathbf{l}}_i = k \cdot \text{Var } \hat{\mathbf{v}}_i \\ \text{mit konstantem } k = \frac{n-u}{u}, \quad (51)$$

d.h. die ausgeglichenen Beobachtungen und die geschätzten Residuen besitzen bis auf einen bekannten konstanten Faktor die gleiche Varianz.

## 6 Fazit

Der Übergang von normalverteilten zu LAPLACE-verteilten Beobachtungsfehlern im linearen Ausgleichsmodell ermöglicht bei Beibehaltung linearer Schätzfunktionen für diese Beobachtungsfehler eine große Freiheit hinsichtlich der (zufälligen) Festlegung von Ge-

wichten für die einzelnen Beobachtungen. Bei Wahl der ursprünglich allein aus geometrischen oder – bei anderen Anwendungen (Kampmann und Linke 1997, Linke et al. 2000, Kampmann und Krause 2000) – aus mechanischen Eigenschaften der Ausgleichungsaufgabe erhaltenen Balancierungsgewichte  $p_{G_i}$  können auf diese Weise auch optimale statistische Eigenschaften für die geschätzten Beobachtungen und Verbesserungen erzeugt werden. Balancierung bedeutet daher nicht nur, dass – wie in der geometrisch-mechanischen Interpretation – jeder Beobachtung der gleiche Einfluss auf die Ausgleichung eingeräumt wird, sondern auch – in der statistischen Interpretation – dass das Verhältnis der Varianzen der geschätzten Beobachtungen und der Varianzen der geschätzten Verbesserungen ausbalanciert wird. Insbesondere zeigt die detaillierte Untersuchung des Spezialfalls einer Ausgleichung mit nur einer Überbestimmung exemplarisch, welche Bedeutung der Balancierung zukommt und wie erstmals die geometrisch-mechanische mit der statistischen Interpretation der balancierten Ausgleichung harmonisiert werden kann.

### Dank

Die Autoren bedanken sich für die wertvollen Hinweise des Gutachters.

### Literatur

- Grafarend, E. W., Schaffrin, B.: Ausgleichungsrechnung in Linearen Modellen. B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1993.
- Grafarend, E. W.: Linear and nonlinear models – fixed effects, random effects and mixed models. de Gruyter, in Vorbereitung.
- Jurisch, R., Kampmann, G.: Über balancierte Beobachtungen im Modell der bedingten Beobachtungen am Beispiel einer ausgleichenden Geraden. In: Beiträge zur Wissenschaft, Technologie und Gestaltung 37, Hochschule Anhalt (FH), 1997.
- Jurisch, R., Kampmann, G.: Vermittelnde Ausgleichungsrechnung mit balancierten Beobachtungen – erste Schritte zu einem neuen Ansatz. Zeitschrift für Vermessungswesen 123, S. 87–92, 1998.
- Jurisch, R., Kampmann, G.: The Generalization of the Properties of the Arithmetic Mean: An Extension to the Method of Least Squares introducing Balancing Factors from the Geometry of the Observations. In: Beiträge zur Wissenschaft, Technologie und Gestaltung 41, Hochschule Anhalt (FH), 1998.
- Jurisch, R., Kampmann, G.: Eine kleine Einführung über die Balancierung in der Ausgleichungsrechnung. In: Beiträge zur Wissenschaft, Technologie und Gestaltung 46, Hochschule Anhalt (FH), 1999.
- Jurisch, R., Kampmann, G.: Plücker-Koordinaten – ein neues Hilfsmittel zur Geometrie-Analyse und Ausreißersuche. Vermessung Photogrammetrie Kulturtechnik 3/2001, S. 146–150.
- Kampmann, G., Krause, B.: Balanced observations with a straight line fit. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini 2, S. 134–141, 1996.
- Kampmann, G., Krause, B.: Über die Äquivalenz von  $L_p$ -Norm-Minimierung und Maximum-Likelihood-Methode. Zeitschrift für Vermessungswesen 120, S. 565–570, 1995.
- Kampmann, G., Krause, B.: Über Zusammenhänge von balancierter Ausgleichsrechnung und Gravitationsgesetz. Zeitschrift für Vermessungswesen 125, S. 352–357, 2000.
- Kampmann, G., Krause, B.: Zum Regressionsmodell der balancierten Ausgleichungsrechnung. Beiträge zur Wissenschaft, Technologie und Gestaltung 68, Hochschule Anhalt (FH), 2003.
- Kampmann, G., Linke, J.: Über die Verwendung von Balancierungsfaktoren bei der Analyse und Optimierung von Stabtragwerken. Beiträge zur Wissenschaft, Technologie und Gestaltung 29, Hochschule Anhalt (FH), 1997.
- Kampmann, G.: Eine Beschreibung der Geometrie von Beobachtungen in der Ausgleichungsrechnung. Zeitschrift für Vermessungswesen 122, S. 369–377, 1997.
- Kampmann, G.: Aktuelle Ansätze in der Auswertetechnik und Ausgleichungsrechnung. In: Wissenschaftliche Schriftenreihe im Markscheidewesen – Neue Technologien und Aufgaben in den Geowissenschaften 17, ISBN 3-89653-249-9, Aachen, 1998.
- Koch, K. R.: Parameterschätzung und Hypothesentests. F. Dümmlers Verlag, Bonn, 1997.
- Lam, E. Y., Goodman, J. W.: Mathematical Analysis of the DCT Coefficient Distributions for Images. IEEE Trans. Image Processing, vol. 9, pp. 1661–1666, Oct. 2000.
- Linke, J., Jurisch, R., Kampmann, G., Runne, H.: Numerisches Beispiel zur Strukturanalyse von geodätischen und mechanischen Netzen mit latenten Restriktionen. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten 10/2000, S. 364–368.
- Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung I und II. F. Dümmlers Verlag, 3. Auflage, Bonn, 1997.

### Anschrift der Autoren:

Prof. Dr.-Ing. Georg Kampmann  
Hochschule Anhalt (FH), Fachbereich Vermessungswesen  
Postfach 2215  
06818 Dessau  
Tel.: 0340 5197-2119  
kampmann@vw.hs-anhalt.de

Dr. rer. nat. Bernd Krause  
Hochschule Anhalt (FH), Fachbereich Informatik  
Postfach 1458  
06354 Köthen  
Tel.: 03496 67-3119  
bernd.krause@inf.hs-anhalt.de