Zur geometrischen Interpretation und direkten Bestimmung von Formfunktionen

Joachim Boljen

Zusammenfassung

Die Koordinatentransformation unter Verwendung von Formfunktionen ist ein sehr universeller Ansatz, um die Umstellung von Bezugssystemen in einzelnen Abschnitten, an verschiedenen Orten und zu unterschiedlichen Zeitpunkten durchführen zu können. Im vorliegenden Beitrag werden die bisherigen Veröffentlichungen zu diesem Thema um eine geometrische Interpretation des Ergebnisses und um eine direkte Bestimmung der dabei benutzten Formfunktionen ergänzt.

Summary

The coordinate transformation under application of form-functions is an universal procedure for the conversion of reference systems which can be done in single steps, from various agencies and at different times. The presented paper completes the existing publications on this subject by the geometrical interpretation of the results and the direct determination of the form-functions under consideration.

1 Formfunktionsansatz

Bei der Koordinatentransformation mit Hilfe von Formfunktionen wird das gesamte Bearbeitungsgebiet in beliebig viele allgemeine Vierecke zerlegt, die entsprechenden Eckpunktkoordinaten des Start- und Zielsystems y_s,x_s bzw. y_z,x_z (Stützpunkte) sind gegeben bzw. im Vorwege bestimmt worden (Boljen 1996, 2003).

Für die umzuformenden Punkte P_i (Objektpunkte) innerhalb des so abgegrenzten Bereichs gilt die exemplarisch für die y-Komponente des Startsystems angegebene Interpolationsbeziehung

$$y_{si} = N_{1i}y_{s1} + N_{2i}y_{s2} + N_{3i}y_{s3} + N_{4i}y_{s4}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

die dabei verwendeten Formfunktionen sind wie folgt festgelegt

$$N_{ji} = 0{,}25(1+\eta_j\eta_i)(1+\xi_j\xi_i), \quad j = 1, \dots, 4, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Bei der eigentlichen Berechnung werden aus den y_{si},x_{si}-Koordinaten des Startsystems zunächst näherungsweise bestimmte η_i,ξ_i-Koordinaten abgeleitet, für die normierten η_j,ξ_j-Koordinaten der Eckpunkte gilt $P_1(-1,-1)$, $P_2(-1,+1)$, $P_3(+1,+1)$ und $P_4(+1,-1)$.

Damit wird es möglich, die Formfunktionen nach (2) und die transformierten y^t_{si},x^t_{si}-Koordinaten nach (1) näherungsweise zu berechnen. Die Unterschiede dieser Werte zu den entsprechenden Ausgangsgrößen y_{si},x_{si} führen anschließend zu einer Verbesserung der aktuellen η_i,ξ_i-Koordinaten. Der gesamte Vorgang wird bis zum Verschwinden dieser Korrekturwerte iterativ wiederholt.

Mit den endgültigen η_i,ξ_i-Koordinaten und den in den Eckpunkten ebenfalls vorgegebenen y_{zj},x_{zj}-Koordinaten des Zielsystems können letztendlich alle gesuchten y_{zi},x_{zi}-Koordinaten der zu transformierenden Punkte P_i ermittelt werden.

2 Geometrische Interpretation des Formfunktionsansatzes

Zur geometrischen Interpretation des Transformationsansatzes nach Formfunktionen sei auf die Abb. 1 verwiesen. Als Bezugsfläche wird weiterhin ein allgemeines Viereck benutzt, dessen Festlegung sich auf ein beliebiges r,h-Koordinatensystem bezieht.

Stellvertretend für die Koordinaten des Start- und Zielsystems y_{sj},x_{sj} bzw. y_{zj},x_{zj} sind die Rechtswerte y_{sj} des Startsystems in den Eckpunkten der Abb. 1 aufgetragen worden. Die so gefundenen Punkte spannen ein räumliches, in der Regel nicht ebenes Viereck auf. Teilt man anschließend die beiden gegenüberliegenden Seiten dieses Vierecks in k gleiche Abschnitte und verbindet man die korrespondierenden Teilungspunkte jeweils durch eine Gerade, dann entsteht mit $k \to \infty$ eine so genannte Regelfläche (Bronstein et al. 2000).

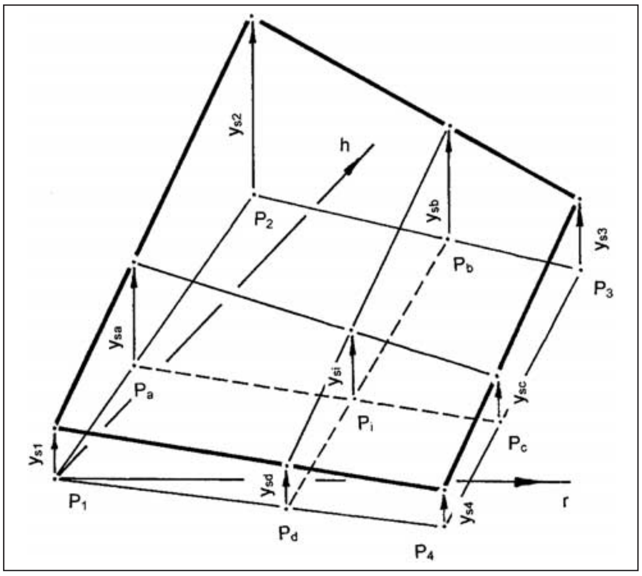

Abb. 1: Koordinatentransformation als Interpolation auf einer Regelfläche

Da die so festgelegte Geradenschar die räumliche Verteilung der y_{si}-Koordinaten in dem betrachteten Teilgebiet darstellt, kann sie gleichzeitig als eine geometrische Interpretation des hier behandelten Transformationsansatzes angesehen werden. Voraussetzung für die Richtigkeit dieser Aussage ist lediglich, dass die Regelfläche eindeutig ist, d. h. dass die mit dem linken und rechten bzw. die mit dem oberen und unteren Rand gebildeten Flächen identisch sind und dass die über eine derartige fortgesetzte lineare Interpolation erzielten Werte mit den nach (1) berechneten Größen eines Formfunktionsansatzes übereinstimmen.

Um den Nachweis zu führen, dass aus beiden denkbaren Ansätzen die gleiche Regelfläche hervorgeht, werden der Punkt P_a zwischen P_1 und P_2 und der Punkt P_c zwischen P_3 und P_4 so eingeschaltet, dass für die entsprechenden Strecken das gleiche Teilungsverhältnis $\lambda_{h,i}$ gilt und P_i auf der geraden Verbindung zwischen P_a und P_c liegt

$$s_{1a} = \lambda_{h,i} s_{12}, \quad s_{4c} = \lambda_{h,i} s_{34}, \quad 0 \le \lambda_{h,i} \le 1, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Anschließend wird der Punkt P_i auf der Grundlage von

$$s_{ai} = \lambda_{r,i} s_{ac}, \quad 0 \le \lambda_{r,i} \le 1, \quad i = 1, \dots, n \tag{4}$$

zwischen den Punkten P_a und P_c interpoliert. Da die Streckenverhältnisse $\lambda_{r,i}$ und $\lambda_{h,i}$ sich auf die entsprechenden Koordinatenunterschiede übertragen, folgt aus (3) und (4) für die stellvertretend betrachtete y-Komponente des Startsystems

$$\begin{aligned} y_{sa} &= y_{s1} + \lambda_{h,i}(y_{s2} - y_{s1}), \quad y_{sc} = y_{s4} + \lambda_{h,i}(y_{s3} - y_{s4}), \\ y_{si} &= y_{sa} + \lambda_{r,i}(y_{sc} - y_{sa}), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{5}$$

Setzt man die vorstehenden Ausdrücke für y_{sa} und y_{sc} in die Beziehung für y_{si} ein, dann erhält man

$$\begin{aligned} y_{si} &= (1 - \lambda_{r,i})(1 - \lambda_{h,i}) y_{s1} + \lambda_{h,i}(1 - \lambda_{r,i}) y_{s2} \\ &\quad + \lambda_{r,i}\lambda_{h,i} y_{s3} + \lambda_{r,i}(1 - \lambda_{h,i}) y_{s4}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{6}$$

Wiederholt man diesen Vorgang, indem man den Punkt P_b und P_d in dem Teilungsverhältnis $\lambda_{r,i}$ zwischen P_2 und P_3 bzw. P_1 und P_4 einschaltet und im Anschluss daran den Punkt P_i im Teilungsverhältnis $\lambda_{h,i}$ zwischen P_d und P_b interpoliert, dann führt dieses ebenfalls zu der bereits unter (6) dargestellten Beziehung. Damit ist gleichzeitig der Nachweis erbracht worden, dass beide Regelflächen (horizontale und vertikale Geradenschar) für alle Punkte P_i innerhalb des hier betrachteten allgemeinen Vierecks zusammenfallen bzw. dass eine fortgesetzte Interpolation in den richtungsbezogenen Teilungsverhältnissen $\lambda_{r,i}$ und $\lambda_{h,i}$ die gleichen Regelflächen hervorbringt.

Um darüber hinaus zu zeigen, dass diese geometrisch begründete Regelfläche mit dem Formfunktionsansatz zusammenfällt, sind die Relationen

$$\eta_i = 2\lambda_{r,i} - 1, \quad \xi_i = 2\lambda_{h,i} - 1, \quad i = 1, \dots, n \tag{7}$$

und die mit $P_1(-1,-1)$, $P_2(-1,+1)$, $P_3(+1,+1)$ und $P_4(+1,-1)$ vorgegebenen η_j,ξ_j-Koordinaten der Eckpunkte in die durch (2) gegebenen Ausdrücke für die Formfunktionen einzusetzen. Dabei ergeben sich die nachstehend aufgeführten Koeffizienten

$$\begin{aligned} N_{1i} &= 0{,}25(1 - \eta_i)(1 - \xi_i) = (1 - \lambda_{r,i})(1 - \lambda_{h,i}), \quad i = 1, \dots, n, \\ N_{2i} &= 0{,}25(1 - \eta_i)(1 + \xi_i) = \lambda_{h,i}(1 - \lambda_{r,i}), \\ N_{3i} &= 0{,}25(1 + \eta_i)(1 + \xi_i) = \lambda_{r,i}\lambda_{h,i}, \\ N_{4i} &= 0{,}25(1 + \eta_i)(1 - \xi_i) = \lambda_{r,i}(1 - \lambda_{h,i}). \end{aligned} \tag{8}$$

Vor dem Hintergrund dieser Zwischenergebnisse bestätigt der Vergleich von (1) und (6) die eingangs gestellte Behauptung, dass der Transformationsansatz nach Formfunktionen mit Hilfe einer Regelfläche geometrisch interpretiert werden kann.

3 Direkte Bestimmung der normierten η_i,ξ_i-Koordinaten

Obwohl für die automatischen Rechenverfahren geradezu prädestiniert, mag man die iterative Berechnung der normierten η_i,ξ_i-Koordinaten aus den entsprechenden y_{si},x_{si}-Werten des Startsystems als störend empfinden.

Um auch eine explizite Rechenvorschrift anzubieten, kann man die Ausdrücke nach (6) neu ordnen

$$\begin{aligned} y_{si} &= \lambda_{r,i}\left[y_{s4} - y_{s1} - \lambda_{h,i}(y_{s4} - y_{s3} + y_{s2} - y_{s1})\right] \\ &\quad + \lambda_{h,i}(y_{s2} - y_{s1}) + y_{s1}, \quad i = 1, \dots, n, \\ x_{si} &= \lambda_{h,i}\left[x_{s2} - x_{s1} - \lambda_{r,i}(x_{s4} - x_{s3} + x_{s2} - x_{s1})\right] \\ &\quad + \lambda_{r,i}(x_{s4} - x_{s1}) + x_{s1} \end{aligned} \tag{9}$$

und wie folgt auflösen

$$\begin{aligned} \lambda_{r,i} &= \frac{y_{si} - y_{s1} - \lambda_{h,i}(y_{s2} - y_{s1})}{y_{s4} - y_{s1} - \lambda_{h,i}(y_{s4} - y_{s3} + y_{s2} - y_{s1})}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \lambda_{h,i} &= \frac{x_{si} - x_{s1} - \lambda_{r,i}(x_{s4} - x_{s1})}{x_{s2} - x_{s1} - \lambda_{r,i}(x_{s4} - x_{s3} + x_{s2} - x_{s1})}. \end{aligned} \tag{10}$$

Wenn man an Stelle des allgemeinen Vierecks ein Quadrat als Bezugsfläche benutzt, dann verschwinden in (10) die Klammerausdrücke, so dass die Proportionalitätsparameter $\lambda_{r,i}$ und $\lambda_{h,i}$ bereits auf dieser Grundlage direkt und abschließend berechnet werden können.

In den Fällen, in denen man das Quadrat als Bezugsfläche ausschließen kann, hat man die Möglichkeit, in $\lambda_{r,i}$ den Ausdruck $\lambda_{h,i}$, bzw. in $\lambda_{h,i}$ den Ausdruck $\lambda_{r,i}$ einzusetzen. Dabei erhält man in jedem Fall eine gemischt quadratische Gleichung, die sich exemplarisch für $\lambda_{r,i}$ wie folgt darstellt

$$a_r \lambda_{r,i}^2 + b_r \lambda_{r,i} + c_r = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Geht man auch weiterhin davon aus, dass das Quadrat (wegen $a_r = 0$) als mögliche Form der Bezugsfläche nicht vorkommt, dann gilt der folgende allgemeine Lösungsansatz für das Teilungsverhältnis $\lambda_{r,i}$

$$\lambda_{r,i,1,2} = \frac{-b_r \pm \left(b_r^2 - 4a_r c_r\right)^{1/2}}{2a_r}, \\ a_r \neq 0, \quad 0 \leq \lambda_{r,i,1,2} \leq 1, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Die Gleichungen (11) und (12) gelten bei entsprechender Indizierung ebenfalls für das Teilungsverhältnis $\lambda_{h,i}$. Für die dabei benutzten Koeffizienten sind die nachstehend aufgeführten Ausdrücke zu verwenden

$$\begin{aligned}
a_r &= (x_{s3} - x_{s2})(y_{s4} - y_{s1}) - (y_{s3} - y_{s2})(x_{s4} - x_{s1}), \\
b_r &= (y_{s4} - y_{s1})(x_{s2} - x_{s1}) - (x_{s4} - x_{s1})(y_{s2} - y_{s1}) \\
&\quad + (y_{si} - y_{s1})(x_{s4} - x_{s3} + x_{s2} - x_{s1}) \\
&\quad - (x_{si} - x_{s1})(y_{s4} - y_{s3} + y_{s2} - y_{s1}), \\
c_r &= (x_{si} - x_{s1})(y_{s2} - y_{s1}) - (y_{si} - y_{s1})(x_{s2} - x_{s1}), \\[1em]
a_h &= (x_{s4} - x_{s3})(y_{s2} - y_{s1}) - (y_{s4} - y_{s3})(x_{s2} - x_{s1}), \\
b_h &= (y_{s4} - y_{s1})(x_{s2} - x_{s1}) - (x_{s4} - x_{s1})(y_{s2} - y_{s1}) \\
&\quad - (y_{si} - y_{s1})(x_{s4} - x_{s3} + x_{s2} - x_{s1}) \\
&\quad + (x_{si} - x_{s1})(y_{s4} - y_{s3} + y_{s2} - y_{s1}), \\
c_h &= -(x_{si} - x_{s1})(y_{s4} - y_{s1}) + (y_{si} - y_{s1})(x_{s4} - x_{s1}), \\
i &= 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{13}$$

Setzt man für den Fall $a_r = 0$ die nach (10) bzw. für $a_r \neq 0$ die nach (12) berechneten Werte für $\lambda_{r,i}$ und $\lambda_{h,i}$ in (7) ein, dann erhält man die zu den y_{si}, x_{si}-Koordinaten des Startsystems gehörenden normierten η_i, ξ_i-Koordinaten auf der Grundlage eines direkten Bestimmungsansatzes.

Der Umfang der dazu erforderlichen Rechenschritte zeigt, dass das iterative Verfahren auf der Grundlage einer automatischen Auswertung deutliche Vorteile aufweist. Unter Berücksichtigung von (10) gilt dies insbesondere für eine quadratische bzw. nahezu quadratische Grundfläche. Hier ist bereits nach wenigen Iterationsschritten eine Konvergenz erreicht, während der direkte Ansatz mit $a_r \to 0$ zunehmend numerische Instabilitäten hervorrufen wird.

4 Schlussbemerkung

Mit Hilfe der Regelflächen ist es möglich, die Transformation von Koordinaten nach Formfunktionen geometrisch zu interpretieren. Dabei wird deutlich, dass dieser Ansatz der Finite-Elemente-Methode mit einer fortgesetzten linearen Interpolation vergleichbar ist.

Vor dem Hintergrund dieser Zusammenhänge können die für die Transformation benutzten normierten Koordinaten explizit angegeben werden. Bei der automatischen Berechnung wird man aus organisatorischen Gründen der iterativen Auflösung jedoch auch weiterhin den Vorzug geben.

Dank

Herr Ltd. Verm. Dir. i. R. Dipl.-Ing. Heribert Wiß, Koblenz, hat durch seinen Hinweis auf die Regelflächen einen entscheidenden Anteil am Zustandekommen dieses Beitrags zur geometrischen Interpretation und direkten Bestimmung von Formfunktionen. Seinen Anregungen und Überlegungen gilt mein besonderer Dank.

Literatur

Boljen, J., Bezugssystemwechsel vom DHDN90 zum ETRS89 durch Transformations- und Formfunktionsansätze, Vermessungswesen und Raumordnung, 58, S. 41–47, 1996.

Boljen, J., Bezugssystemumstellung DHDN90 ↔ ETRS89 in Schleswig-Holstein, zfv 128, S. 244–250, 2003.

Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., Musiol, G., Mühlig, H., Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 2000.

Anschrift des Autors
Dr.-Ing. habil. Joachim Boljen
Direktor des Landesvermessungsamts Schleswig-Holstein
Mercatorstraße 1
24106 Kiel