

# Darstellung des Gravitationsfeldes und seiner Funktionale mit sphärischen Multiskalentechniken

Martin J. Fengler, Willi Freeden und Martin Gutting

## Zusammenfassung

Die Grundgleichungen der Physikalischen Geodäsie (in der klassischen Formulierung) werden einer Multiskalenformulierung mittels sphärisch (harmonischer) Wavelets unterzogen. Die Energieverteilung des Störpotentials wird in Auflösung nach Skala und Ort durch Verwendung von Waveletvarianzen beschrieben. Schließlich werden für die Modellierung der zeitlichen Variationen des Schwerefeldes zeit- und ortsgebundene Energiespektren zur Detektion lokaler sowie periodischer/saisonaler Strukturen eingeführt.

## Summary

*The fundamental equations of physical geodesy (in classical terms) are formulated in a multiscale concept using spherical (harmonic) wavelets. The energy distribution of the disturbing potential is resolved in scale and space by wavelet variances. Finally, time and space related energy spectra are introduced to model temporal variations of the gravity field and to detect local and periodic/seasonal structures.*

## 1 Einleitung

Wavelets bilden vielseitige Hilfsmittel zur Darstellung von Funktionen und zur Aufbereitung von Datenmengen. Ein wesentlicher Aspekt ist die Fähigkeit, Details verschiedener Größe in Signalen und Bildern zu erkennen und zu analysieren. So lassen sich Verfahren zur Datenkompression, zum Denoising, zur Mustererkennung etc. ableiten sowie neue effiziente Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen, Integralgleichungen sowie von inversen Problemen durch Multiskalenanalyse gewinnen.

Die rasante Entwicklung in der konstruktiven Approximation und der Computertechnologie sowie der enorme Fortschritt bei digitalen Beobachtungs- und Messtechniken in den letzten Jahren eröffnen die Frage, inwiefern die bisher entwickelten Wavelettechniken für die Grundgleichungen der Physikalischen Geodäsie der Bestimmung der Erdfigur und des äußeren Schwerefeldes eingesetzt werden können. Eine adäquate Antwort ist dringend erforderlich, da durch Satellitenmissionen wie z. B. CHAMP, GRACE, GOCE ein gewaltiges Aufkommen von Datenmengen hoher Präzision und großer, lokal unterschiedlicher Dichte global verfügbar wird, die die Modellierung von Phänomenen im makroskaligen Bereich bis hin zu den Feinstrukturen des »Signals Erdschwerefeld« ermöglichen.

Der vorliegende Artikel basiert wesentlich auf den Ergebnissen der Arbeitsgruppe Geomathematik der Techni-

schen Universität Kaiserslautern während der letzten Jahre (siehe z. B. Freeden 1999, Freeden et al. 1998, Freeden und Michel 2004) und soll eine Übersicht speziell über sphärische Waveletmethoden geben in Analogie zu dem Beitrag von P. Schwintzer (2004) im Antrag zum geplanten DFG-Schwerpunktprogramm (Ilk et al. 2004). Den Untersuchungen ist die Vorstellung von Wavelets als »konstituierende Multiskalenbausteine des Gravitationspotentials der Erde« gemeinsam, die in schneller und effizienter Weise zu einer Dekorrelation gegebener Datenmengen befähigen. Diese inhaltliche Charakterisierung enthält demnach drei wesentliche Merkmale:

- (i) Wavelets sind Bausteine zur Multiresolution von Funktionen,
- (ii) Wavelets besitzen die Fähigkeit der Dekorrelation,
- (iii) Wavelets erlauben schnelle Algorithmen.

Im Detail ausgeführt für die Grundproblematik der Physikalischen Geodäsie bedeutet dies: Entfernt man die außerhalb des Geoids befindlichen topographischen Massen durch Schwerereduktion (vgl. z. B. Groten 1979, Heiskanen und Moritz 1967), so lässt sich auf einer sphärischen Referenzfläche  $\Omega_R$  (vom Radius  $R$ ) bekanntlich das Störpotential  $T$  nach (einem  $\mathcal{L}^2(\Omega_R)$ -orthonormalen System von) Kugelfunktionen  $\{Y_{n,k}^R\}$  mit  $Y_{n,k}^R(x) = \frac{1}{R} Y_{n,k}\left(\frac{x}{R}\right)$ ,  $x \in \Omega_R$ , entwickeln, wobei  $Y_{n,k}$  die Kugelfunktionen auf der Einheitssphäre bezeichnen. Lässt man – wie üblich – den Mittelpunkt des Referenzellipsoids und den Erdschwerpunkt zusammenfallen, so gilt für das Störpotential  $T$ , d. h. die Differenz zwischen Schwerepotential  $W$  und ellipsoidischem Normalpotential  $U$  die Darstellung:

$$T(x) = GM \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \sum_{k=-n}^n T^\wedge(n, k) \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n+1} Y_{n,k}^R(x), \quad (1)$$

wobei  $GM$  das Produkt aus Gravitationskonstante und Erdmasse ist und  $T^\wedge(n, k)$  die dimensionslosen Fourierkoeffizienten von  $T$  bezüglich  $Y_{n,k}^R$  darstellen:

$$GM T^\wedge(n, k) = \int_{\Omega_R} T(y) Y_{n,k}^R(y) d\omega(y) \quad (2)$$

( $d\omega$  : Flächenelement). Genauer gesagt gelten unter der kanonischen Annahme, dass  $T$  eine auf dem Außenraum  $\Omega_R^{ext}$  samt Rand  $\Omega_R$ , d. h. eine auf  $\Omega_R^{ext} = \Omega_R \cup \Omega_R^{ext}$  stetige, in  $\Omega_R^{ext}$  harmonische und im Unendlichen reguläre Funktion (d. h.  $|T(x)| = \mathcal{O}(|x|^{-1})$  für  $|x| \rightarrow \infty$ ) ist, die folgenden Grenzbeziehungen

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega_R} \left( T(y) - \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^N \sum_{k=-n}^n T^\wedge(n, k) Y_{n,k}^R(y) \right)^2 d\omega(y) = 0 \tag{3}$$

und

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} \left| T(x) - \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^N \sum_{k=-n}^n T^\wedge(n, k) Y_{n,k}^R(x) \right| = 0, \tag{4}$$

wobei  $K$  eine Teilmenge des Außenraumes  $\Omega_R^{ext}$  der Sphäre  $\Omega_R$  mit positivem Randabstand zu  $\Omega_R$  (d. h.  $\text{dist}(\overline{K}, \Omega_R) > 0$ ) ist. Die Fourierentwicklung des Störpotentials nach Kugelfunktionen ist äußerst erfolgreich, bestimmte Frequenzen (d. h. Wellenlängen abhängig von dem Grad  $n$  und der Ordnung  $k$ ) des Störpotentials anzusprechen. Sie berücksichtigt aber entsprechend ihrer Konzeption nicht die räumliche Evolution von Frequenzen. Folglich enthalten die Fourierkoeffizienten Information über die Frequenzen gemittelt über alle Positionen. Sie zeigen aber nicht, wie das Frequenzverhalten sich räumlich verändert. Daher ist eine Kugelfunktionsentwicklung kaum in der Lage, sich auf einer kleinen räumlichen Skala ändernde Daten zu modellieren.

Einen Ausweg in Richtung räumlicher Evolution bietet zunächst die formale Vertauschung von Reihe und Integral. Dies führt zu einer integralen Faltungsdarstellung des Störpotentials mit Hilfe des Dirac-Kerns

$$\delta(x, y) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \underbrace{\delta^\wedge(n)}_{=1} \left( \frac{R^2}{|x||y|} \right)^{n+1} Y_{n,k}^R(x) Y_{n,k}^R(y), \tag{5}$$

$(x, y) \in \overline{\Omega_R^{ext}} \times \overline{\Omega_R^{ext}}$ , in der Form

$$T = \delta * T = \int_{\Omega_R} \delta(\cdot, y) T(y) d\omega(y), \tag{6}$$

wobei die Gleichheit auf  $\Omega_R$  im Sinne einer hier nicht näher spezifizierten Sobolevschen Topologie zu verstehen ist. Näheres findet sich in Freeden (1999), Freeden und Michel (2004). Das Additionstheorem der Theorie der Kugelfunktionen liefert für  $(x, y) \in \overline{\Omega_R^{ext}} \times \overline{\Omega_R^{ext}}$

$$\delta(x, y) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \delta^\wedge(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left( \frac{R^2}{|x||y|} \right)^{n+1} P_n \left( \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|} \right), \tag{7}$$

wobei  $P_n$  das Legendre-Polynom vom Grade  $n$  bezeichnet. Der Dirac-Kern weist als Reihe über alle Mitglieder des abgeschlossenen und vollständigen Systems der Kugelfunktionen keine Frequenzlokalisierung auf. Somit ist auch die Faltungsapproximation mit dem Dirac-Kern nicht geeignet zu einer räumlich variablen Frequenzanalyse. Zusammenfassend kann man sagen, dass Kugelfunktionen und Dirac-Kerne zwei »extreme Vertreter« von

Approximationsstrukturen des Störpotentials bilden. Der polynomiale Charakter der Kugelfunktionen befähigt zur idealen Frequenzlokalisierung unter Ausschluss der Ortslokalisierung, der Dirac-Kern liefert ideale Ortslokalisierung unter Ausschluss der Frequenzlokalisierung (beachte, dass gilt:  $\delta^\wedge(n) = 1, n = 0, 2, 3, \dots$ ).

Variables ortsabhängiges Modellieren von Frequenzverhalten führt nun zu einem Kompromiss in der Wahl der Approximationsstrukturen, der letztlich die Multiskalenphilosophie begründet. Ausgangspunkt (vgl. Freeden 1999, Freeden 2001) ist die Benutzung so genannter Skalierungsfunktionen, d. h. skalenabhängiger Kerne  $\Phi_j(\cdot, \cdot)$  der Gestalt

$$\Phi_j(x, y) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \varphi_j(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left( \frac{R^2}{|x||y|} \right)^{n+1} P_n \left( \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|} \right), \tag{8}$$

mit  $(x, y) \in \overline{\Omega_R^{ext}} \times \overline{\Omega_R^{ext}}$ . Diese Kerne müssen die folgenden Eigenschaften besitzen:

- (i)  $\varphi_j(0) = 1$  für alle  $j$
- (ii)  $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j(n) = \delta^\wedge(n) = 1$  für  $n = 0, 2, 3, \dots$
- (iii)  $\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \varphi_j^2(n) < \infty$  für jedes  $j$ .

Mit anderen Worten,  $(x, y) \mapsto \Phi_j(x, y), (x, y) \in \overline{\Omega_R^{ext}} \times \overline{\Omega_R^{ext}}$ , ist bei festem  $x$  als Funktion von  $y$  ein stetiger Kern in  $\overline{\Omega_R^{ext}}$ , der im Außenraum  $\Omega_R^{ext}$  harmonisch ist, und darüber hinaus

$$\Phi_j(x, y) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \delta(x, y) \tag{9}$$

(in einer hier nicht weiter diskutierten Metrik) erfüllt. Wegen der Symmetrie des Kerns gelten die obigen Eigenschaften umgekehrt auch für festes  $y$  bei variablem  $x$ . Die Multiskalenapproximation des Störpotentials  $T$  gelingt dann in der Form

$$\begin{aligned} T &= \lim_{j \rightarrow \infty} (\Phi_j^{(2)} * T) = \lim_{j \rightarrow \infty} (\Phi_j * (\Phi_j * T)) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega_R} \Phi_j(z, \cdot) \int_{\Omega_R} \Phi_j(z, y) T(y) d\omega(y) d\omega(z) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega_R} \Phi_j^{(2)}(\cdot, y) T(y) d\omega(y). \end{aligned} \tag{10}$$

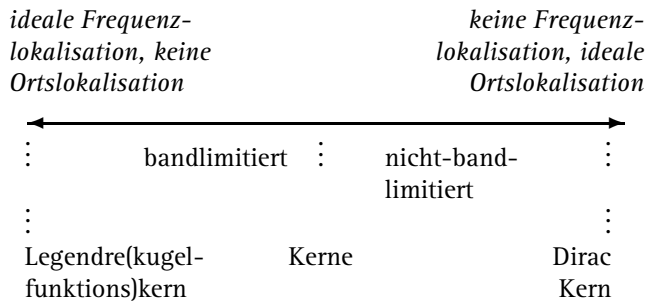
Genauer gesagt (vgl. Freeden 1999) ergeben sich:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega_R} \left( T(x) - (\Phi_j^{(2)} * T)(x) \right)^2 d\omega(x) \right)^{1/2} = 0 \tag{11}$$

und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} \left| T(x) - (\Phi_j^{(2)} * T)(x) \right| = 0 \tag{12}$$

für alle Teilmengen  $K$  des Außenraumes  $\Omega_R^{ext}$  mit  $\text{dist}(\bar{K}, \Omega_R) > 0$ . Durch die Verwendung von Skalierungsfunktionen gelingt es, in Form einer Multiskalenmethode sowohl Orts- als auch Frequenzlokalisation in den Grenzen der (Heisenberg'schen) Unschärferelation zu steuern (siehe Schema 1).



Schema 1: Schema zu Frequenz- und Ortslokalisation

Die Multiskalenmethode trägt damit dem Umstand Rechnung, dass das Störpotential Korrelationen sowohl im Ort als auch in der Frequenz besitzt, die es spezifisch zu modellieren gilt. In der Tat sind Daten in örtlicher Nachbarschaft stärker korreliert als weiter entfernte, Frequenzen treten in ortslokal abhängiger Bandform auf. Um die Signale dieses Typs zu analysieren und zu rekonstruieren, benötigt man skalenabhängige Teststrukturen, d.h. Skalierungsfunktionen, die ausgewogen im Orts- und Frequenzraum lokalisieren. Die Multiskalenmethode bietet somit alle »Zwischenrealisationen« der Fourierentwicklung mittels Kugelfunktionen, die eine optimale Zerlegung des Signals im Frequenzraum erlaubt, und der Faltung mit dem Dirac-Kern, der optimal im Ortsraum lokalisiert. Das Ausmaß der Frequenz- bzw. Ortslokalisation bei der Multiskalenmethode ist abhängig von der Wahl der Skalierungsfunktion. Als repräsentative Beispiele seien genannt:

(a) Bandlimitierte Skalierungsfunktionen

(1) **Shannon Skalierungsfunktion**

$$\varphi_j^{SH}(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n \in [0, 2^j) \setminus \{1\} \\ 0 & \text{für } n \in [2^j, \infty), \end{cases}$$

(2) **CP Skalierungsfunktion**

(CP = **C**ubic **P**olynomial)

$$\varphi_j^{CP}(n) = \begin{cases} (1 - 2^{-j}n)^2(1 + 2^{-j+1}n) & \text{für } n \in [0, 2^j) \setminus \{1\} \\ 0 & \text{für } n \in [2^j, \infty). \end{cases}$$

(b) Nicht-bandlimitierte Skalierungsfunktionen

(1) **Rationale Skalierungsfunktion**

$$\varphi_j^{RA}(n) = (1 + 2^{-j}n)^{-\alpha}, \quad n = 0, 2, 3, \dots \quad \text{mit } \alpha > 1.$$

(2) **Exponentielle Skalierungsfunktionen**

(z.B. Abel-Poisson Skalierungsfunktion)

$$\varphi_j^{AP}(n) = e^{-2^{-j}\alpha n}, \quad n = 0, 2, 3, \dots, \alpha > 0.$$

Weitere Beispiele finden sich in den Abhandlungen Freeden (1999), Freeden et al. (1998), Freeden und Michel (2004).

Für jede Position  $x \in \overline{\Omega_R^{ext}}$  gibt die Faltung  $(\Phi_j^{(2)} * T)(x)$  bei unterschiedlichem Skalierungsparameter  $j$  verschiedene geglättete Ansichten des Störpotentials an dieser Stelle wieder, d.h. die Funktion  $\Phi_j^{(2)} * T$  lässt sich in  $\overline{\Omega_R^{ext}}$  als Glättung bis zum Grad  $j$  des Skalierungsparameters (Tiefpassfilter) deuten. Die assoziierte Waveletapproximation  $\tilde{\Psi}_j * (\Psi_j * T)$  wird als Differenz zwischen zwei Glättungen  $\Phi_{j+1}^{(2)} * T$  und  $\Phi_j^{(2)} * T$  verstanden, d.h.  $(x, y) \mapsto \Psi_j(x, y)$  und  $(x, y) \mapsto \tilde{\Psi}_j(x, y)$  sind gegeben durch

$$\Psi_j(x, y) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \psi_j(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left( \frac{R^2}{|x||y|} \right)^{n+1} P_n \left( \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|} \right), \quad (13)$$

$$\tilde{\Psi}_j(x, y) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \tilde{\psi}_j(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left( \frac{R^2}{|x||y|} \right)^{n+1} P_n \left( \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|} \right) \quad (14)$$

mit den Symbolen  $\psi_j(n)$  und  $\tilde{\psi}_j(n)$ , die sich aus der sogenannten Verfeinerungsgleichung

$$\psi_j(n)\tilde{\psi}_j(n) = \varphi_{j+1}^2(n) - \varphi_j^2(n), \quad n = 0, 2, 3, \dots \quad (15)$$

durch Wurzelziehen (dann ist  $\Psi_j = \tilde{\Psi}_j - \text{»P-Scale Wavelets«}$ ) oder Anwendung der 3. Binomischen Formel (dann ist  $\Psi_j = \Phi_{j+1} - \Phi_j$  und  $\tilde{\Psi}_j = \Phi_{j+1} + \Phi_j - \text{»M-Scale Wavelets«}$ ) ergeben. In bestimmten Spezialfällen wie z.B. bei exponentiellen »P-Scale Wavelets«, die aus Schichtpotentials konstruiert werden (vgl. Freeden und Mayer 2003), sowie bei »M-Scale Wavelets« (wie z.B. »Abel-Poisson Wavelets« aus der oben genannten Abel-Poisson Skalierungsfunktion) kann man eine summationsfreie Darstellung der Wavelets erreichen. Das Wavelet  $\Psi_j$  nennt man primäres Wavelet; es wird zur Berechnung der Wavelettransformation benutzt,  $\tilde{\Psi}_j$  heißt duales Wavelet, das zur Rekonstruktion benötigt wird. Die Faltung  $\tilde{\Psi}_j * (\Psi_j * T)$  gibt somit für jede Position die Detailinformation an, um von der Glättung  $\Phi_j * (\Phi_j * T)$  zur Skala  $j$  zur Glättung  $\Phi_{j+1} * (\Phi_{j+1} * T)$  zur Skala  $j + 1$  zu gelangen. Eine leichte Rechnung (siehe Freeden 1999) zeigt, dass für jedes  $J, j_0 \geq 1$  mit  $j_0 < J$

$$\Phi_j^{(2)} * T = \Phi_{j_0}^{(2)} * T + \sum_{j=j_0}^{J-1} \tilde{\Psi}_j * (\Psi_j * T) \quad (16)$$

gilt. Man beachte, dass die lineare Faltung  $\Phi_{j_0}^{(2)} * T$  mit  $\Phi_{j_0} * (\Phi_{j_0} * T)$  zusammenfällt. Genauer gesagt bedeutet (16) in Verbindung mit (11) und (12), dass

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega_R} \left( T(x) - (\Phi_{j_0}^{(2)} * T)(x) - \sum_{j=j_0}^{J-1} (\tilde{\Psi}_j * (\Psi_j * T))(x) \right)^2 d\omega(x) \right)^{1/2} = 0 \quad (17)$$

und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} \left| T(x) - (\Phi_{j_0}^{(2)} * T)(x) - \sum_{j=j_0}^{J-1} (\tilde{\Psi}_j * (\Psi_j * T))(x) \right| = 0 \quad (18)$$

für jedes  $K \subset \Omega_R^{ext}$  mit  $\text{dist}(\bar{K}, \Omega_R) > 0$  gilt. Die in (17) und (18) auftretenden Faltungsintegrale stellen bilineare Faltungen dar.

Für numerische Auswertungen sind schließlich folgende Diskretisierungen vorzunehmen:

- (1) Die unendliche Reihe  $\sum_{j=j_0}^{\infty} \dots$  ist durch eine endliche Summe der Form  $\sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \dots$  bei geeignet gewähltem  $J_{max}$  zu ersetzen (siehe (16)).
- (2) Ein Faltungsintegral der Form

$$(\Psi_j * T)(x) = \int_{\Omega_R} \Psi_j(x, y) T(y) d\omega(y), \quad (19)$$

mit  $x \in \overline{\Omega_R^{ext}}$ , ist durch eine entsprechende Näherungsformel des Typs

$$\sum_{i=1}^{N_j} w_i^j \Psi_j(x, y_i^j) T(y_i^j), \quad x \in \overline{\Omega_R^{ext}}, \quad (20)$$

mit Gewichten  $w_i^j \in \mathbb{R}$  und Knoten  $y_i^j \in \Omega_R$  zu approximieren. Näherungsformeln dieser Art finden sich beispielsweise in Freeden (1999), Freeden et al. (1998), Freeden und Michel (2004) und den Referenzen dieser Bücher.

## 2 Darstellung des Gravitationspotentials mit Hilfe von sphärisch-harmonischen Wavelets

Das Gravitationspotential  $V$  der Erde erhält man bekanntlich aus dem Schwerepotential  $W$  unter Auslassung des durch die Zentrifugalkraft bedingten Anteils  $\Phi$ . In Formeln bedeutet dies:  $V = W - \Phi$ . In einem Punkt  $x \in \Omega_R$  kann es (in oben beschriebener Diskretisation) als Summe einer Basisapproximation mit Hilfe einer Skalierungsfunktion und der Details, die sich durch Faltung mit dem zugehörigen dualen Wavelet ergeben, dargestellt werden:

$$V(x) = \frac{GM}{R} \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} v_i^{\Phi_{j_0}} \Phi_{j_0}(x, y_i^{j_0}) + \frac{GM}{R} \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j v_i^{\tilde{\Psi}_j} \tilde{\Psi}_j(x, y_i^j). \quad (21)$$

Dabei sind  $w_i^{j_0}, w_i^j$  die Integrationsgewichte für die zugrunde liegende sphärische Integration auf  $\Omega_R$ ,  $v_i^{\Phi_{j_0}}$  die Skalierungsfunktionskoeffizienten von  $V$  zur Skala  $j_0$  sowie  $v_i^{\tilde{\Psi}_j}$  die Waveletkoeffizienten von  $V$  zur Skala  $j$ . Die Integrationsknoten  $y_i^{j_0}, y_i^j \in \Omega_R$  gehören zu den oben genannten Koeffizienten und Integrationsgewichten der jeweiligen Skala und  $N_{j_0}, N_j$  bezeichnet die Anzahl der Punkte bzw. Koeffizienten bei der Skala  $j_0$  bzw.  $j$ . Die Koeffizienten  $v_i^{\Phi_{j_0}}$  und  $v_i^{\tilde{\Psi}_j}$  ergeben sich aus den folgenden Faltungen:

$$\begin{aligned} \frac{GM}{R} v_i^{\Phi_{j_0}} &= (\Phi_{j_0} * V)(y_i^{j_0}) \\ &= \int_{\Omega_R} \Phi_{j_0}(y_i^{j_0}, y) V(y) d\omega(y), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{GM}{R} v_i^{\tilde{\Psi}_j} &= WT_j(V; y_i^j) = (\Psi_j * V)(y_i^j) \\ &= \int_{\Omega_R} \Psi_j(y_i^j, y) V(y) d\omega(y). \end{aligned} \quad (23)$$

$WT_j(V; \cdot)$  bezeichnet die Wavelettransformierte von  $V$  zur Skala  $j$ . Näheres zu solchen Waveletkoeffizienten findet sich in Fengler et al. (2003a) sowie Fengler et al. (2003b).

Sowohl die Integrationsgewichte und -knoten wie auch die Koeffizienten hängen von der Wahl des sphärischen Integrationsverfahrens ab. Allgemeiner ist die folgende Integraldarstellung:

$$V(x) = \int_{\Omega_R} (\Phi_{j_0} * V)(y) \Phi_{j_0}(x, y) d\omega(y) + \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \int_{\Omega_R} WT_j(V; y) \tilde{\Psi}_j(x, y) d\omega(y). \quad (24)$$

Bekannte Verfahren zur numerischen Integration über die Sphäre sind unter anderen Gleichverteilung oder Verfahren, die auf polynomialer Exaktheit oder Spline-Exaktheit basieren (vgl. Driscoll und Healy 1994, Freeden 1999, Freeden et al. 1998). Eine Rekonstruktion und Dekomposition von (24) in Form eines Pyramidenschemas finden sich unter Verwendung dieser Integrationstechniken in der Arbeit Freeden et al. (2003).

Das Störpotential  $T$  berechnet sich bekanntlich (vgl. Groten 1979, Heiskanen und Moritz 1967 oder Torge 2001) durch Subtraktion des ellipsoidischen Normalpotentials  $U = V_{ell} + \Phi$  vom Schwerepotential  $W$ :

$$T(x) = W(x) - U(x) = V(x) - V_{ell}(x). \quad (25)$$

Dieses Störpotential kann dann mittels der eingangs präsentierten Konzeption harmonischer Wavelets in der folgenden Multiskalendarstellung entwickelt werden:

$$T(x) = \frac{GM}{R} \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} t_i^{\Phi_{j_0}} \Phi_{j_0}(x, y_i^{j_0}) + \frac{GM}{R} \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\Psi_j} \Psi_j(x, y_i^j). \quad (26)$$

Hierin bezeichnen nun  $t_i^{\Phi_{j_0}}$  die Skalierungsfunktionskoeffizienten des Störpotentials  $T$  zur Skala  $j_0$  sowie  $t_i^{\Psi_j}$  die Waveletkoeffizienten von  $T$  zur Skala  $j$ . Sie hängen wie folgt mit den Koeffizienten  $v_i^{\Phi_{j_0}}$  und  $v_i^{\Psi_j}$  zusammen:

$$\begin{aligned} \frac{GM}{R} t_i^{\Psi_j} &= (\Psi_j * T)(y_i^j) \\ &= (\Psi_j * (V - V_{ell}))(y_i^j) \\ &= (\Psi_j * V)(y_i^j) - (\Psi_j * V_{ell})(y_i^j) \\ &= \frac{GM}{R} v_i^{\Psi_j} - (\Psi_j * V_{ell})(y_i^j), \end{aligned} \quad (27)$$

analog für die Skalierungsfunktionskoeffizienten  $t_i^{\Phi_{j_0}}$ . Da man  $V_{ell}$  als Summe weniger bestimmter Kugelfunktionen (mit  $\text{Grad} \leq m$ , zumeist  $m = 8$ ) mit Kugelfunktionskoeffizienten  $V_{ell}^\wedge(n, k)$  ansetzen kann (vgl. Groten 1979, Heiskanen und Moritz 1967, Torge 2001)

$$V_{ell}(x) = GM \left( V_{ell}^\wedge(0, 0) \frac{R}{|x|} Y_{0,0}^R(x) + \sum_{n=2}^m V_{ell}^\wedge(n, 0) \left( \frac{R}{|x|} \right)^{n+1} Y_{n,0}^R(x) \right), \quad (28)$$

lassen sich die oben noch enthaltenen Faltungen wie folgt vereinfachen (wobei ausgenutzt wurde, dass  $|y_i^{j_0}| = |y_i^j| = R$ )

$$\begin{aligned} t_i^{\Psi_j} &= v_i^{\Psi_j} - \left( \Psi_j * \frac{R}{GM} V_{ell} \right) (y_i^j) \\ &= v_i^{\Psi_j} - \left( \psi_j(0) V_{ell}^\wedge(0, 0) R Y_{0,0}^R(y_i^j) + \sum_{n=2}^m \psi_j(n) V_{ell}^\wedge(n, 0) R Y_{n,0}^R(y_i^j) \right) \\ &= v_i^{\Psi_j} - \sum_{n=2}^m \psi_j(n) V_{ell}^\wedge(n, 0) Y_{n,0} \left( \frac{y_i^j}{R} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

bzw.

$$\begin{aligned} t_i^{\Phi_{j_0}} &= v_i^{\Phi_{j_0}} - V_{ell}^\wedge(0, 0) Y_{0,0} \left( \frac{y_i^{j_0}}{R} \right) \\ &\quad - \sum_{n=2}^m \varphi_{j_0}(n) V_{ell}^\wedge(n, 0) Y_{n,0} \left( \frac{y_i^{j_0}}{R} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

weil zulässige Symbole einer Skalierungsfunktion die Bedingung  $\varphi_j(0) = 1$  für alle  $j$  erfüllen müssen und somit  $\psi_j(0) = 0$  für alle  $j$  ist.

### 3 Funktionale des gravitativen Störpotentials in Multiskalendarstellung

Mit Hilfe der Brunsschen Formel  $N = T/\gamma$  (vgl. z. B. Groten 1979, Heiskanen und Moritz 1967, Torge 2001) lässt sich aus der Multiskalendarstellung des Störpotentials eine Multiskalenzerlegung der Geoidundulationen bestimmen. Mit  $\gamma$  bezeichnet man bekanntlich in der Bruns Formel die Normalschwere (und diese wird üblicherweise mit  $\gamma = \frac{GM}{R^2}$  sphärisch approximiert). Also ergibt sich nach klassischem Zugang folgende Formel für die Multiskalendarstellung der Geoidundulationen:

$$N(x) = \frac{R^2}{GM} T(x) = R \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} t_i^{\Phi_{j_0}} \Phi_{j_0}(x, y_i^{j_0}) + R \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\Psi_j} \Psi_j(x, y_i^j). \quad (31)$$

Im Anhang A befindet sich zur Illustration eine volle Multiresolution der Geoidundulationen, die nach den Skalen 2 bis 8 aufgelöst und mit den zugehörigen Detailbereichen abgebildet wurde. Hierbei wurden CP-Skalierungsfunktionen und CP-Wavelets eingesetzt.

Die Definition der Schwerestörung (gravity disturbance) als negative erste Radialableitung des Störpotentials  $\delta g = -\frac{\partial T}{\partial r}$ , d. h.  $\delta g(x) = \langle -\frac{x}{|x|}, \nabla_x T(x) \rangle$ , führt zu der folgenden Darstellung

$$\begin{aligned} \delta g(x) &= -\frac{GM}{R} \left( \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} t_i^{\Phi_{j_0}} \frac{\partial}{\partial r_x} \Phi_{j_0}(x, y_i^{j_0}) + \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\Psi_j} \frac{\partial}{\partial r_x} \Psi_j(x, y_i^j) \right) \\ &= \frac{GM}{R|x|} \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} t_i^{\Phi_{j_0}} \Phi_{j_0}^{\delta g}(x, y_i^{j_0}) + \frac{GM}{R|x|} \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\Psi_j} \Psi_j^{\delta g}(x, y_i^j) \end{aligned} \quad (32)$$

mit

$$\begin{aligned} \Psi_j^{\delta g}(x, y_i^j) &= -|x| \frac{\partial}{\partial r_x} \Psi_j(x, y_i^j) \\ &= |x| \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \tilde{\psi}_j(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left( \frac{n+1}{|x|} \right) \\ &\quad \times \left( \frac{R^2}{|x||y_i^j|} \right)^{n+1} P_n \left( \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y_i^j}{|y_i^j|} \right) \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \tilde{\psi}_j^{\delta g}(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left( \frac{R^2}{|x||y_i^j|} \right)^{n+1} P_n \left( \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y_i^j}{|y_i^j|} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

und analog definiertem  $\Phi_{j_0}^{\delta g}$ , d. h. dort wird dann  $\varphi_{j_0}^{\delta g}(n)$  statt  $\tilde{\psi}_j^{\delta g}(n)$  benutzt. Diese Symbole haben die Gestalt

$\varphi_j^{\delta g}(n) = (n + 1)\varphi_j(n)$ ,  $\tilde{\psi}_j^{\delta g}(n) = (n + 1)\tilde{\psi}_j(n)$  und somit gilt, dass

$$\tilde{\psi}_j^{\delta g}(n)\psi_j(n) = \varphi_{j+1}^{\delta g}(n)\varphi_j(n) - \varphi_j^{\delta g}(n)\varphi_j(n), \quad (34)$$

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \left( \varphi_{j_0}^{\delta g}(n)\varphi_{j_0}(n) + \sum_{j=j_0}^J \tilde{\psi}_j^{\delta g}(n)\psi_j(n) \right) = n + 1. \quad (35)$$

Betrachten wir die sphärische Approximation der Schwerestörung nur für Punkte  $x$  auf der Referenzsphäre mit Radius  $R$  bzw. auf dem Geoid selbst, dann ist  $|x| = R$  und der Vorfaktor wird zu  $GM/R^2$ .

Die Schwereanomalien sind in sphärischer Näherung gegeben durch

$$\Delta g(x) = -\frac{\partial T}{\partial r_x}(x) - \frac{2}{|x|}T = \delta g(x) - \frac{2}{|x|}T, \quad (36)$$

was in analoger Weise zu folgender Multiskalendarstellung führt

$$\begin{aligned} \Delta g(x) &= \frac{GM}{R|x|} \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} t_i^{\Phi_{j_0}} \Phi_{j_0}^{\delta g}(x, y_i^{j_0}) \\ &\quad + \frac{GM}{R|x|} \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\tilde{\Psi}_j} \tilde{\Psi}_j^{\delta g}(x, y_i^j) \\ &\quad - \frac{2}{|x|} \left( \frac{GM}{R} \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} t_i^{\Phi_{j_0}} \Phi_{j_0}(x, y_i^{j_0}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{GM}{R} \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\tilde{\Psi}_j} \tilde{\Psi}_j(x, y_i^j) \right) \\ &= \frac{GM}{R|x|} \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} t_i^{\Phi_{j_0}} \Phi_{j_0}^{\Delta g}(x, y_i^{j_0}) \\ &\quad + \frac{GM}{R|x|} \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\tilde{\Psi}_j} \tilde{\Psi}_j^{\Delta g}(x, y_i^j), \end{aligned} \quad (37)$$

wobei wir

$$\tilde{\Psi}_j^{\Delta g}(x, y_i^j) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \tilde{\psi}_j^{\Delta g}(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left( \frac{R^2}{|x||y_i^j|} \right)^{n+1} P_n \left( \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y_i^j}{|y_i^j|} \right), \quad (38)$$

sowie analog die Skalierungsfunktion  $\Phi_{j_0}^{\Delta g}$  eingeführt haben. Das Symbol  $\tilde{\psi}_j^{\Delta g}(n)$  berechnet sich als

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_j^{\Delta g}(n) &= \tilde{\psi}_j^{\delta g}(n) - 2\tilde{\psi}_j(n) \\ &= (n+1)\tilde{\psi}_j(n) - 2\tilde{\psi}_j(n) = (n-1)\tilde{\psi}_j(n). \end{aligned} \quad (39)$$

Die Summation über  $n$  bei der Definition der Skalierungsfunktion  $\Phi_{j_0}^{\Delta g}$  und den zugehörigen dualen Wavelets  $\tilde{\Psi}_j^{\Delta g}$  enthält bekanntlich keine Anteile mit Kugelfunktionsgrad 1.

Bestimmt man die zweite Ableitung des Störpotentials, erhält man den Schweretensor (gravity-gradient tensor). Wir betrachten nun die Multiskalenrepräsentation der radialen Richtung dieses Tensors, d. h. der zweiten Radialableitung  $g_r = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ , auch vertikaler Schweregradient genannt:

$$\begin{aligned} g_r(x) &= \frac{GM}{R} \left( \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} t_i^{\Phi_{j_0}} \frac{\partial^2}{\partial r_x^2} \Phi_{j_0}(x, y_i^{j_0}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\tilde{\Psi}_j} \frac{\partial^2}{\partial r_x^2} \tilde{\Psi}_j(x, y_i^j) \right) \\ &= \frac{GM}{R|x|^2} \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} t_i^{\Phi_{j_0}} \Phi_{j_0}^{g_r}(x, y_i^{j_0}) \\ &\quad + \frac{GM}{R|x|^2} \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\tilde{\Psi}_j} \tilde{\Psi}_j^{g_r}(x, y_i^j). \end{aligned} \quad (40)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_j^{g_r}(x, y_i^j) &= |x|^2 \frac{\partial^2}{\partial r_x^2} \tilde{\Psi}_j(x, y_i^j) \\ &= |x|^2 \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \tilde{\psi}_j(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \frac{(n+1)(n+2)}{|x|^2} \\ &\quad \times \left( \frac{R^2}{|x||y_i^j|} \right)^{n+1} P_n \left( \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y_i^j}{|y_i^j|} \right) \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \tilde{\psi}_j^{g_r}(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left( \frac{R^2}{|x||y_i^j|} \right)^{n+1} P_n \left( \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y_i^j}{|y_i^j|} \right), \end{aligned} \quad (41)$$

und analog wird auch  $\Phi_{j_0}^{g_r}$  definiert, wobei für die Symbole gilt, dass  $\varphi_j^{g_r}(n) = (n+1)(n+2)\varphi_j(n)$  sowie  $\tilde{\psi}_j^{g_r}(n) = (n+1)(n+2)\tilde{\psi}_j(n)$  ist und somit

$$\tilde{\psi}_j^{g_r}(n)\psi_j(n) = \varphi_{j+1}^{g_r}(n)\varphi_j(n) - \varphi_j^{g_r}(n)\varphi_j(n), \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \lim_{J \rightarrow \infty} \left( \varphi_{j_0}^{g_r}(n)\varphi_{j_0}(n) + \sum_{j=j_0}^J \tilde{\psi}_j^{g_r}(n)\psi_j(n) \right) \\ = (n+1)(n+2). \end{aligned} \quad (43)$$

Kennt man also die Waveletkoeffizienten des Störpotentials, lassen sich nicht nur das Potential, sondern auch alle weiteren genannten Größen rekonstruieren. Dies wird nun am Beispiel von CP-Rekonstruktionen in Abb. 1 und 2 bei Skala 7 und dem zugehörigen Detailbereich für die Schwereanomalien demonstriert.

#### 4 Die Energieverteilung des Gravitationsfeldes der Erde

Die Verteilung der lokal variablen Energie des »Signals Störpotential« kann mit Hilfe von Waveletvarianzen beschrieben werden. Dabei wird nicht nur die Verteilung

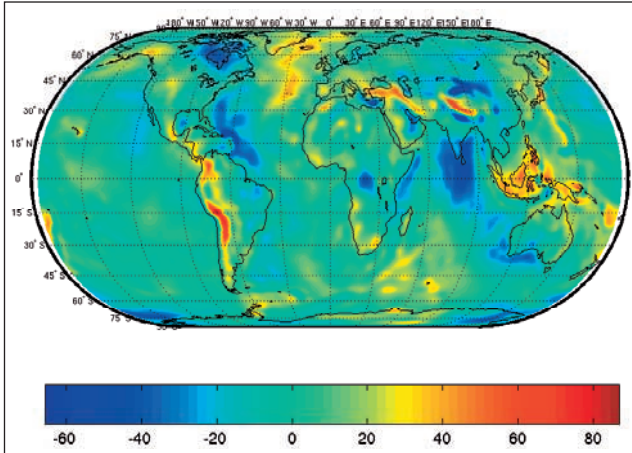
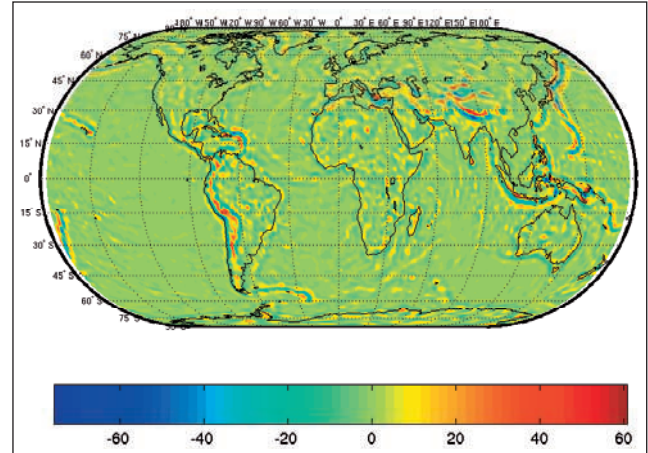
Abb. 1: Schwereanomalien auf  $\Omega_R$  zur Skala 7 in [mgal]

Abb. 2: Detail der Schwereanomalien zur Skala 7 in [mgal]

im Frequenzbereich, d. h. über die verschiedenen Skalen, sondern – wie in unserer Einleitung gewünscht – auch im Ortsbereich offenbart. Allgemein sind die Skalen- und Ortsvarianzen von  $T$  zur Skala  $j$  an der Stelle  $x$  definiert (vgl. Freeden und Maier 2002, Freeden und Maier 2003) als

$$\text{Var}_{j;x}(T) = (T(\cdot) * \Psi_j(\cdot, x))^2. \quad (44)$$

Die nicht-ortsabhängige Skalenvarianz zur Skala  $j$  ist dann

$$\sigma_j^2(T) = \text{Var}_j(T) = \int_{\Omega_R} \text{Var}_{j;x}(T) d\omega(x). \quad (45)$$

Die Summe aller Skalenvarianzen zusammen mit der Energie der Approximation mittels einer Skalierungsfunktion liefert dann die Gesamtenergie des Störpotentials  $\|T\|_{L^2(\Omega_R)}^2$  (vgl. Freeden und Maier 2002). Sie lassen sich aus den Waveletkoeffizienten des Störpotentials  $T$  (siehe Darstellung (26)) ermitteln. Die Größe

$$\begin{aligned} \sigma_{j;x}^2 &= \left( (WT_j \left( \frac{R}{GM} T; \cdot \right) * SH(\cdot, \cdot))(x) \right)^2 \\ &= \left( \int_{\Omega_R} WT_j \left( \frac{R}{GM} T; y \right) SH(y, x) d\omega(y) \right)^2 \\ &= \left( \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\Psi_j} SH(y_i^j, x) \right)^2 \end{aligned} \quad (46)$$

ist die einheitenlose Waveletvarianz bei Skala  $j$  an der Stelle  $x$ , berechnet aus den Waveletkoeffizienten des Störpotentials. Dabei bezeichnet  $SH$  einen passend zum benutzten Wavelet (Typ und Skala) gewählten Shannon-Skalierungsfunktionskern, dessen Symbol oben eingeführt wurde und dessen Skala (und damit der Wert  $N_{SH}$ ) hoch genug ist, um  $WT_j$  aufzulösen, d. h. im bandlimitierten Fall  $j+1$  (vgl. Freeden et al. 1998, Freeden 1999). Somit erhält man für die Waveletvarianzen des Störpotentials selbst (in  $[m^4/s^4]$ ,  $\sigma_{j;\cdot}(T)$  dann in  $[m^2/s^2]$ ):

$$\text{Var}_{j;x}(T) = \sigma_{j;x}^2(T) = \frac{GM^2}{R^2} \sigma_{j;x}^2. \quad (47)$$

Eine Illustration der Waveletvarianzen des Störpotentials  $T$  ist in Abb.3 und Abb.4 gegeben. Beide Bilder zeigen sehr illustrativ, dass unsere Waveletmethoden die hochfrequenten, *energetisch lokal konzentrierten* Phänomene des Störfeldes mit wenigen Parametern beschreiben können. Es wurden hier CP-Wavelets bei Skala 6 und 7 benutzt. Für die Waveletvarianzen der Geoidhöhen  $N$  (Einheit  $[m^2]$ ,  $\sigma_{j;\cdot}(N)$  dann in  $[m]$ ) gilt:

$$\text{Var}_{j;x}(N) = \sigma_{j;x}^2(N) = R^2 \sigma_{j;x}^2. \quad (48)$$

Für die Waveletvarianzen der Schwerestörungen  $\delta g$  (Einheit  $[m^2/s^4]$ ,  $\sigma_{j;\cdot}(\delta g)$  dann in  $[m/s^2]$ ) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{Var}_{j;x}(\delta g) &= \sigma_{j;x}^2(\delta g) \\ &= \left( (WT_j(T; \cdot) * SH^{\delta g}(\cdot, \cdot))(x) \right)^2 \\ &= \left( \frac{GM}{R} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\Psi_j} SH^{\delta g}(y_i^j, x) \right)^2 \end{aligned} \quad (49)$$

mit einem Shannon-Kern analog zu Gleichung (33)

$$\begin{aligned} SH^{\delta g}(y_i^j, x) &= -\frac{\partial}{\partial r_x} SH(y_i^j, x) \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{N_{SH}} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \frac{n+1}{|x|} \left( \frac{R^2}{|x||y_i^j|} \right)^{n+1} P_n \left( \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y_i^j}{|y_i^j|} \right). \end{aligned} \quad (50)$$

Für die Waveletvarianzen der Schwereanomalien  $\Delta g$  (Einheit  $[m^2/s^4]$ ,  $\sigma_{j;\cdot}(\Delta g)$  dann in  $[m/s^2]$ ) erhält man:

$$\begin{aligned} \text{Var}_{j;x}(\Delta g) &= \sigma_{j;x}^2(\Delta g) \\ &= \left( (WT_j(T; \cdot) * SH^{\Delta g}(\cdot, \cdot))(x) \right)^2 \\ &= \left( \frac{GM}{R} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\Psi_j} SH^{\Delta g}(y_i^j, x) \right)^2 \end{aligned} \quad (51)$$

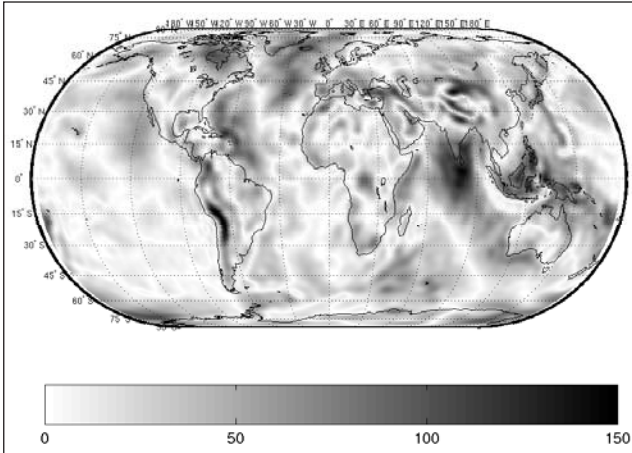


Abb. 3:  $\sigma_{j;\cdot}(T)$  auf  $\Omega_R$  zur Skala 6 in  $[m^2/s^2]$

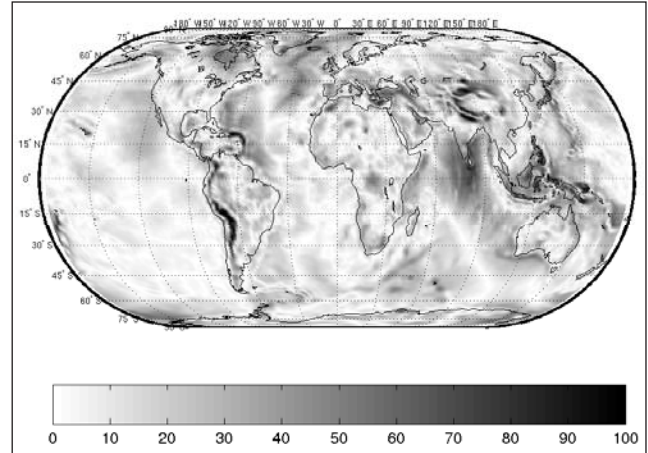


Abb. 4:  $\sigma_{j;\cdot}(T)$  auf  $\Omega_R$  zur Skala 7 in  $[m^2/s^2]$

mit einem Shannon-Kern analog zu Gleichung (38)

$$\begin{aligned} SH^{\Delta g}(y_i^j, x) &= SH^{\delta g}(y_i^j, x) - \frac{2}{|x|} SH(y_i^j, x) \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{N_{SH}} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \frac{n-1}{|x|} \left( \frac{R^2}{|x||y_i^j|} \right)^{n+1} P_n \left( \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y_i^j}{|y_i^j|} \right). \end{aligned} \quad (52)$$

Für die Waveletvarianzen der vertikalen Schweregradienten  $g_r$  (Einheit  $[1/s^4]$ ,  $\sigma_{j;\cdot}(g_r)$  dann in  $[1/s^2]$ ) folgt:

$$\begin{aligned} \text{Var}_{j;x}(g_r) &= \sigma_{j;x}^2(g_r) \\ &= ((WT_j(T; \cdot) * SH^{g_r}(\cdot, \cdot))(x))^2 \\ &= \left( \frac{GM}{R} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j t_i^{\Psi_j} SH^{g_r}(y_i^j, x) \right)^2 \end{aligned} \quad (53)$$

mit einem Shannon-Kern analog zu Gleichung (41)

$$\begin{aligned} SH^{g_r}(y_i^j, x) &= \frac{\partial^2}{\partial r_x^2} SH(y_i^j, x) \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{N_{SH}} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \frac{(n+1)(n+2)}{|x|^2} \left( \frac{R^2}{|x||y_i^j|} \right)^{n+1} P_n \left( \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y_i^j}{|y_i^j|} \right). \end{aligned} \quad (54)$$

Die jeweilige Skalenvarianz berechnet sich durch Integration, wie in Formel (45) beschrieben. Sie lässt sich für die folgenden Fälle vereinfachen:

$$\text{Var}_j(T) = \int_{\Omega_R} \text{Var}_{j;x}(T) d\omega(x) = \frac{GM}{R} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j \left( t_i^{\Psi_j} \right)^2, \quad (55)$$

$$\text{Var}_j(N) = \int_{\Omega_R} \text{Var}_{j;x}(N) d\omega(x) = R \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j \left( t_i^{\Psi_j} \right)^2. \quad (56)$$

## 5 Zeitliche Variationen des Erdschwerefelds

Zur Auflösung eines präzisen globalen Erdschwerefelds werden zusätzlich zeitliche Veränderungen berücksichtigt, die ihre Ursache beispielsweise im Massentransport durch Ozean- und Erdzeiten haben (vgl. Ilk et al. 2004, NRC 1997). Wir beschäftigen uns im Folgenden mit der zeitlichen Variation des Erdschwerefeldes, die durch Deformation der festen Erde unter Einfluss von Auflasteffekten hervorgerufen wird (vgl. auch Peters 2001). Dazu zählt u. a. der Jahreszeiten abhängige Schnee-, Eis- sowie Wassertransport, wobei ein besonderes Augenmerk darauf liegt, dass die Auflasteffekte regionalen Charakter haben, z. B. jahreszeitliche Schwankungen der Schnee- und Eisbedeckung in polaren Regionen (siehe auch Wahr et al. 1998). Somit lassen sich diese geophysikalisch sinnvoll in eine Waveletdarstellung des Erdgravitationspotentials einbetten.

Die zeitlichen Variationen der Skalierungsfunktionskoeffizienten  $v_i^{\Phi, j_0}$  und der zugehörigen Waveletkoeffizienten  $v_i^{\Psi_j}$  unterliegen einem breiten und intensitätsabhängigen Spektrum: Kurzzeitige, kleine Effekte werden beispielsweise durch Luftdruckschwankungen der Atmosphäre hervorgerufen. Auf geringfügig größeren Zeitskalen verändern hydrologisch induzierte Auflasteffekte das Gravitationspotential, wie zum Beispiel die Bodenfeuchte. Schließlich spielen auf wesentlich größeren Zeitskalen noch Effekte wie die nacheiszeitliche Hebung eine Rolle. Zudem sind Veränderungen der Kern-Mantelkopplung durch Strömungen im Erdinnern und andere Variationen messbar (siehe Ilk et al. 2004, NRC 1997, Peters 2001).

Die Modellierung zeitabhängiger Messungen, wie sie zum Beispiel von CHAMP oder GRACE monatsweise geliefert werden, erfordern eine Modifikation, so dass  $\tilde{V}(t, x)$  die Variationen um das mittlere Gravitationspotential  $V(x)$  aus Gleichung (21) beschreibt:



$$\begin{aligned} \tilde{V}(t, x) = & \frac{GM}{R} \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} \tilde{v}_i^{\Phi_{j_0}}(t) \Phi_{j_0}(x, y_i^{j_0}) \\ & + \frac{GM}{R} \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j \tilde{v}_i^{\tilde{\Psi}_j}(t) \tilde{\Psi}_j(x, y_i^j). \end{aligned} \quad (57)$$

In dieser Arbeit konzentrieren wir uns nur auf die Modellierung von Prozessen der Oberfläche (Atmosphäre, Kryosphäre, Ozeane, Wasserhaushalt der Kontinente) mit saisonalen und jährlichen Variationen. Die zeitlichen Veränderungen der Oberflächendichte  $S$  (Masse/Fläche) kann mit Hilfe von sphärischen Wavelets wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{aligned} S(t, x) = & R\rho_w \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} s_i^{\Phi_{j_0}}(t) \Phi_{j_0}^L(x, y_i^{j_0}) \\ & + \frac{GM}{R} \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j s_i^{\tilde{\Psi}_j}(t) \tilde{\Psi}_j^L(x, y_i^j). \end{aligned} \quad (58)$$

Hierbei bezeichnet  $\rho_w$  die Dichte von Wasser, um die Koeffizienten  $s_i^{\Phi_{j_0}}(t)$  und  $s_i^{\tilde{\Psi}_j}(t)$  einheitenfrei zu halten. Tatsächlich sind die Koeffizienten  $s_i^{\Phi_{j_0}}(t)$  und  $s_i^{\tilde{\Psi}_j}(t)$  identisch mit  $\tilde{v}_i^{\Phi_{j_0}}(t)$  und  $\tilde{v}_i^{\tilde{\Psi}_j}(t)$ , weil die Skalierungsfunktion und das Wavelet zur Rekonstruktion die Auflastabhängigkeit modelliert. Genauer gesagt, führen wir die so genannten Love-Wavelets ein:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_j^L(x, y_i^j) = & \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\psi}_j^L(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left( \frac{R^2}{|x||y_i^j|} \right)^{n+1} P_n \left( \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y_i^j}{|y_i^j|} \right), \end{aligned} \quad (59)$$

und analog ergeben sich Love-Skalierungsfunktionen  $\Phi_j^L$  mit dem Symbol

$$\varphi_j^L(n) = \varphi_j(n) \frac{3\rho_w}{\rho_{ave}} \frac{1+k'_n}{2n+1}, \quad (60)$$

wobei  $\rho_{ave}$  die durchschnittliche Erddichte ist (ca. 5517 kg/m<sup>3</sup>), und  $k'_n$  die bekannten Love-Zahlen sind.

Die Symbole der Love-Wavelets berechnen sich aus der folgenden Verfeinerungsgleichung:

$$\psi_j^L(n) \tilde{\psi}_j^L(n) = (\varphi_{j+1}^L)^2(n) - (\varphi_j^L)^2(n). \quad (61)$$

Dividiert man  $S(t, x)$  durch die Dichte  $\rho_w$ , kann man den Term  $S(t, x)/\rho_w$  als Höhenänderungen einer Wassersäule (1 mbar/ $\gamma \approx 1$  cm, mit der mittleren Erdbeschleunigung  $\gamma$ ) interpretieren.

Bestimmt man umgekehrt aus beispielsweise Luftdruckmessungen oder hydrologischen Daten eine Waveletentwicklung analog zu Gleichung (57), so erhält man Koeffizienten  $s_i^{\Phi_{j_0}}(t)$  und  $s_i^{\tilde{\Psi}_j}(t)$  für die Änderung der Oberflächendichte. Aus diesen lassen sich aber auch direkt die Beiträge zur zeitlichen Variation des Erdgravitationspotentials  $\tilde{V}$  ableiten, indem man zur Rekonstruktion

inverse Love-Skalierungsfunktionen und Wavelets verwendet:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t, x) = & \frac{GM}{R} \sum_{i=1}^{N_{j_0}} w_i^{j_0} s_i^{\Phi_{j_0}}(t) \Phi_{j_0}^{L^{-1}}(x, y_i^{j_0}) \\ & + \frac{GM}{R} \sum_{j=j_0}^{J_{max}} \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j s_i^{\tilde{\Psi}_j}(t) \tilde{\Psi}_j^{L^{-1}}(x, y_i^j). \end{aligned} \quad (62)$$

Dabei ergeben sich die inversen Love-Skalierungsfunktionen  $\Phi_j^{L^{-1}}$  mit dem Symbol

$$\varphi_j^{L^{-1}}(n) = \varphi_j(n) \frac{\rho_{ave}}{3\rho_w} \frac{2n+1}{1+k'_n} \quad (63)$$

und analog zur Gleichung (61) die Symbole der inversen Love-Wavelets  $\tilde{\Psi}_j^{L^{-1}}$ .

Es sei der Vollständigkeit halber erwähnt, dass die Verwendung der Love-Zahlen wie in den Love-Skalierungsfunktionen und Wavelets mehr exemplarischen Charakter hat: Um zeitabhängige Phänome des Erdschwerefelds hochpräzise zu erfassen, ist es außerdem notwendig, radiale Dichteveränderungen in den Ozeanen (über die Tiefe) sowie der Atmosphäre (über die Höhe) genauer zu beschreiben. Jedoch demonstriert die oben beschriebene Entwicklung in Wavelets eine ganz besondere Eigenschaft: Wavelets erlauben die Auftrennung regionaler zeitabhängiger Effekte. So lassen sich beispielsweise an Hand weniger (räumlich zugeordneter) Koeffizienten Zeitreihen der jahreszeitlichen Änderungen der Eisbedeckung der polaren Regionen analysieren.

## Auflösen zeit- und ortsgebundener Energiespektren

Selbstverständlich kann man analog zu Gleichung (44) die ortsgebundenen Waveletvarianzen zeitabhängig gestalten:

$$\begin{aligned} \text{Var}_{j;x}(\tilde{V})[t] = & (\tilde{V}(t, \cdot) * \Psi_j(\cdot, x)) (\tilde{V}(t, \cdot) * \Psi_j(\cdot, x)) \\ = & \frac{GM}{R} \left( \sum_{i=1}^{N_j} w_i^j \tilde{v}_i^{\tilde{\Psi}_j}(t) SH(y_i^j, x) \right)^2. \end{aligned} \quad (64)$$

Dabei lässt sich die Größe  $\text{Var}_{j;x}(\tilde{V})[t]$  physikalisch als zeitabhängiger Energiegehalt in einem von dem Ort  $x$  und der Skala  $j$  (Frequenzband) abhängigen Lokalgebiet interpretieren. So kann man beispielsweise durch Untersuchen einer Zeitreihe von *lokalen* Waveletvarianzen das spektrale, örtliche und zeitliche Verhalten der polaren Eisbedeckung analysieren. Wendet man in diesem Fall eine Fourier-Transformation bezüglich der Zeit an, so lassen sich ihre regionalen und periodischen/saisonalen Strukturen detektieren. Dazu berechnet man die Größe

$$\text{Var}_{j;x}(\tilde{V})[f] = \int_{\mathbb{R}} \text{Var}_{j;x}(\tilde{V})[t] e^{-ift} dt, \quad (65)$$

und stellt dann ihren Betrag gegenüber der Frequenz  $f$  dar. Diese Darstellung zeigt genau bei der halb-/ganz-jahreszeitlichen Frequenz ein lokales Maximum.

Zur Detektion von kurzzeitigen aperiodischen Effekten sollte man allerdings besser eine 1-d Wavelet- als eine Fourier-Transformation verwenden. Dazu kann man die klassischen Methoden von Mallat und anderen (Mallat 1998) einsetzen. Jedoch sollte darauf hingewiesen werden, dass man eine zeitabhängige Modellierung aus einem einzigen »funktionalen« Guss bekommt, wenn man auch eindimensionale Wavelets basierend auf Legendre Polynomen verwendet, siehe Freeden (1999). Denn sie betten sich der gesamten algorithmischen Struktur auf natürliche Weise ein.

## 6 Zusammenfassung

In der Analysis von Geopotentialfunktionen, wie z. B. des Störpotentials, können wir drei fundamental verschiedene Zugänge unterscheiden:

- (1) Klassische Fouriermethoden mittels Kugelfunktionen (Polynome),
- (2) Waveletmethoden mittels skalenabhängiger Kernfunktionen (Skalierungsfunktionen),
- (3) Finite-Punkte-Methoden mittels Dirac'scher Kernfunktionen (Partikelmethode, vgl. z. B. Cui 1995).

Die Bedeutung der Wavelets liegt in der Konstruktion von Kernen mit sowohl variabler Frequenz- als auch Ortslokalisierung. Der Waveletzugang besitzt daher die Fähigkeit der flexiblen Modellierung des Signals »Störpotential« entsprechend der Frequenz- und Ortsspezifika. Die Multi-resolutionmethode erlaubt somit eine adäquate Darstellung von mittel- und kurzwelligen Anteilen des Signals auf lokaler Basis. Lokale (z. B. zeitliche) Änderungen des Signals machen sich aufgrund des ortslokalisierenden Charakters nur lokal bemerkbar. Die Speicherung lokaler Phänomene erfolgt lokal über die Wavelettransformierten. Diese können rekursiv mittels Algorithmen in Baumstruktur erschlossen werden (vgl. Freeden 1999, Freeden et al. 1998, Freeden und Michel 2004). Insgesamt ergibt sich also ein weites Feld neuartiger Anwendungen in der Beschreibung des Gravitationsfeldes, insbesondere bei der lokalen Verbesserung globaler Modelle unter Realisation einer räumlich veränderlichen Frequenzanalyse.

### Literatur

Cui, J.: Finite Pointset Methods on the Sphere and Their Application in Physical Geodesy. PhD. Thesis, University of Kaiserslautern, Geomathematics Group, 1995.

Driscoll, J.R., Healy, D.M.: Computing Fourier Transforms and Convolutions on the 2-Sphere. *Adv. Appl. Math.*, 15: 202–250, 1994.

Fengler, M.J., Freeden, W., Gutting, M.: Multiscale Modeling from EIGEN-1S, EIGEN-2, EIGEN-GRACE01S, UCPH2002\_0.5, EGM96. In: Multiscale Modeling of CHAMP-Data, Freeden, W., Michel, V. (eds). Schriften zur Funktionalanalysis und Geomathematik, TU Kaiserslautern, Bericht 4, Teil C, 2003.

Fengler, M.J., Freeden, W., Gutting, M.: Multiscale Modeling from EIGEN-1S, EIGEN-2, EIGEN-GRACE01S, GGM01S, UCPH2002\_0.5, EGM96: Wavelet Coefficients, Variances and Reconstruction. Siehe Internet (<http://www.mathematik.uni-kl.de/~wwwgeo/waveletmodels.html>), 2003.

Fengler, M.J., Freeden, W., Kusche, J.: Multiscale Geopotential Solutions from CHAMP Orbits and Accelerometry. In: Multiscale Modeling of CHAMP-Data, Freeden, W., Michel, V. (eds). Schriften zur Funktionalanalysis und Geomathematik, TU Kaiserslautern, Bericht 4, Teil B, 2003.

Fengler, M.J., Freeden, W., Michel, V.: The Kaiserslautern Multiscale Geopotential Model SWITCH-03 from Orbit Perturbations of the Satellite CHAMP and Its Comparison to the Models EGM96, UCPH2002\_02\_0.5, EIGEN-1s, and EIGEN-2. *Geophys. J. Int.* 157: 499–514, 2004.

Freeden, W.: Multiscale Modelling of Spaceborn Geodata. B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1999.

Freeden, W.: Multiscale Modelling of GOCE Data Products. ESA Report, WPP-188, 111–126, 2001.

Freeden, W., Gervens, T., Schreiner, M.: Constructive Approximation on the Sphere (With Applications to Geomathematics). Oxford Science Publications, Clarendon, 1998.

Freeden, W., Groten, E., Michel, V., Arfa-Kaboodvand, K.: Geopotential Reconstruction, Decomposition, Fast Computation, and Noise Cancellation by Harmonic Wavelets. *Studia Geophysica et Geodaetica* 47(1): 37–72, 2003.

Freeden, W., Maier T.: On Multiscale Denoising of Spherical Functions: Basic Theory and Numerical Aspects. *Electron. Trans. Numer. Anal. (ETNA)*, 14: 40–62, 2002.

Freeden, W., Maier T.: Spectral and Multiscale Signal-to-Noise Thresholding of Spherical Vector Fields. *Computational Geosciences* 7(3): 215–250, 2003.

Freeden, W., Mayer C.: Wavelets Generated by Layer Potentials. *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 14: 195–237, 2003.

Freeden, W., Michel, V.: Multiscale Potential Theory (with Applications to Geosciences). Birkhäuser, 2004. (in print)

Groten, E.: Geodesy and the Earth's Gravity Field I, II. Dümmler, 1979.

Heiskanen, W.A., Moritz, H.: Physical Geodesy. W.H. Freeman and Company, 1967.

Ilk, K.H., Flury, J., Rummel, R., Schwintzer, P., Bosch, W., Haas, C., Schröter, J., Stammer, D., Zahel, W., Miller, H., Dietrich, R., Huybrechts, P., Schmeling, H., Wolf, D., Riegger, J., Bardossy, A., Günthner, A.: Mass Transport and Mass Distribution in the Earth System. Proposal for a German Priority Research Program, GOCE-Projektbüro Deutschland, TU München, GFZ Potsdam, 2004.

Mallat, S.: A Wavelet Tour of Signal Processing. 2nd Edition, Academic Press, San Diego, San Francisco, New York, 1998.

NRC (National Research Council; Chair: J.O. Dickey): Satellite Gravity and the Geosphere: Contributions to the Study of the Solid Earth and Its Fluid Envelope. National Academy Press, Washington, D. C., 1997.

Peters, T.: Zeitliche Variationen des Gravitationsfeldes der Erde. Diplomarbeit, Inst. f. Astr. u. Phys. Geodäsie (IAPG), TU München, 2001.

Torge, W.: Geodesy. 3rd edition, W. de Gruyter, Berlin – New York, 2001.

Wahr, J.S., Molenaar, M., Bryan, F.: Time Variability of the Earth's Gravity Field: Hydrological and Oceanic Effects and their Possible Detection Using GRACE. *J. Geophys. Res.*, 103 (B12), 30205–30229, 1998.

### Anschrift der Autoren

Dipl.-Math. Martin J. Fengler  
Arbeitsgruppe Geomathematik, TU Kaiserslautern  
Postfach 3049, D-67653 Kaiserslautern  
Tel.: 0631 205-4084, [fengler@mathematik.uni-kl.de](mailto:fengler@mathematik.uni-kl.de)

Prof. Dr. Willi Freeden  
Arbeitsgruppe Geomathematik, TU Kaiserslautern  
Postfach 3049, D-67653 Kaiserslautern  
Tel.: 0631 205-3867, [freeden@mathematik.uni-kl.de](mailto:freeden@mathematik.uni-kl.de)

Dipl.-Math. Martin Gutting  
Arbeitsgruppe Geomathematik, TU Kaiserslautern  
Postfach 3049, D-67653 Kaiserslautern  
Tel.: 0631 205-4826, [gutting@mathematik.uni-kl.de](mailto:gutting@mathematik.uni-kl.de)

## Anhang A

Wie in Kapitel 3 angekündigt, wird hier eine Multi-resolutionsdarstellung der Geoidundulationen mittels CP-Skalierungsfunktionen und CP-Wavelets der Skalen 2 bis 8 gezeigt. Sie wurde aus einer Multiskalendarstellung des Störpotentials des EGM96-Modells, d. h. den Koeffizienten  $t_i^{\Phi_{j0}}$  und  $t_i^{\Psi_j}$ , berechnet. Die rechten Abbildungen zeigen stets die Details, die dann zur bisherigen Approxi-

mation (links) hinzugefügt werden, um die nächste Skala (dann eine Zeile weiter unten abgebildet) zu erhalten. (Multiresolutionsdarstellungen zu anderen Geopotentialmodellen und zu realen CHAMP-Daten finden sich in Fengler et al. 2003a, Fengler et al. 2003b, Fengler et al. 2003c und Fengler et al. 2003d.)

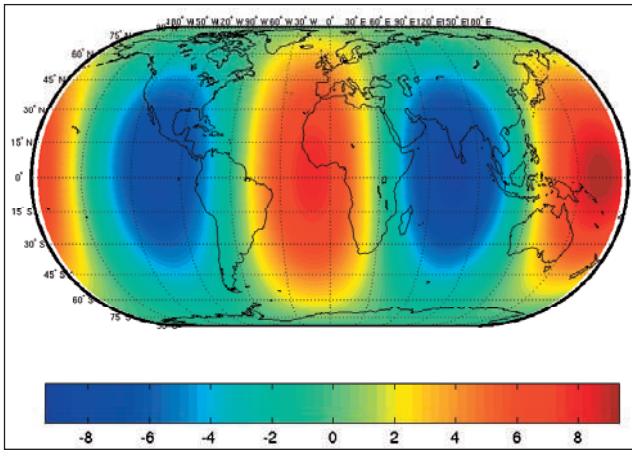
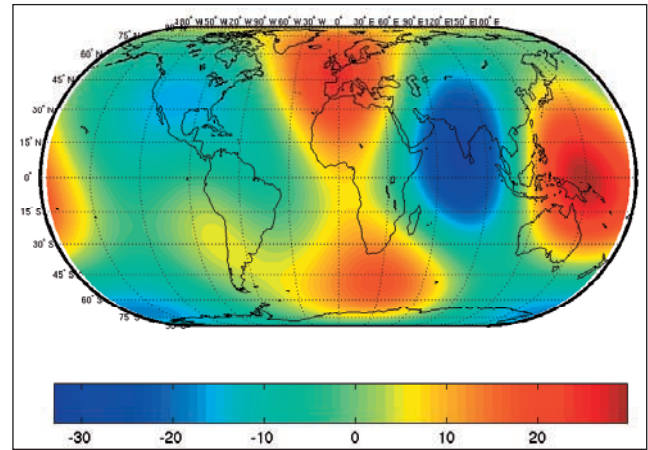
Abb. 5: Geoidundulationen auf  $\Omega_R$  zur Skala 2 in [m]

Abb. 6: Detail der Geoidundulation zur Skala 2 in [m]

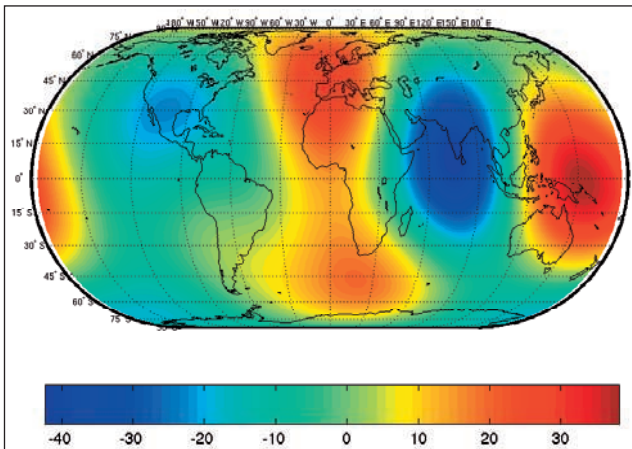
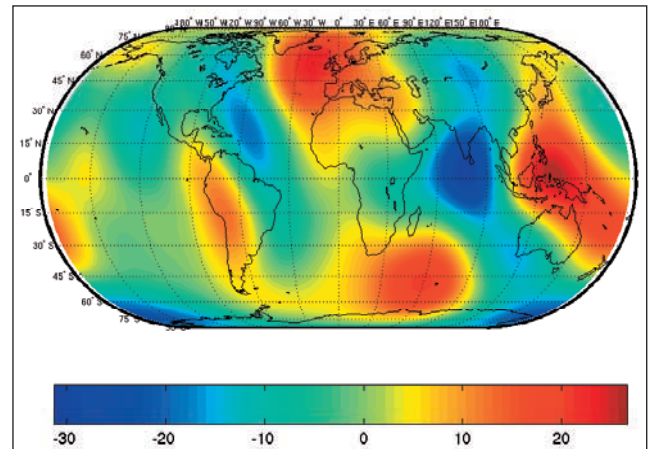
Abb. 7: Geoidundulationen auf  $\Omega_R$  zur Skala 3 in [m]

Abb. 8: Detail der Geoidundulation zur Skala 3 in [m]

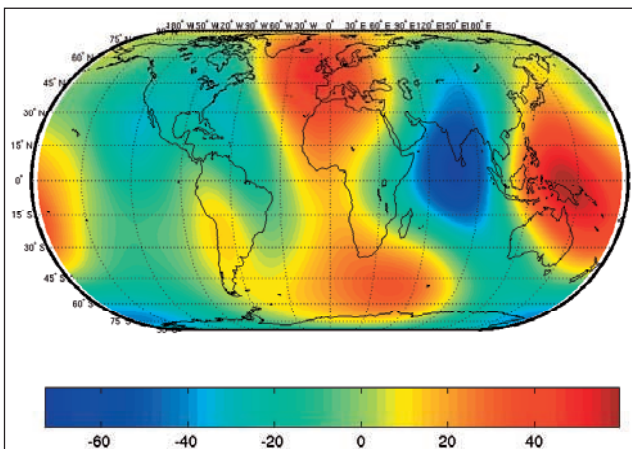
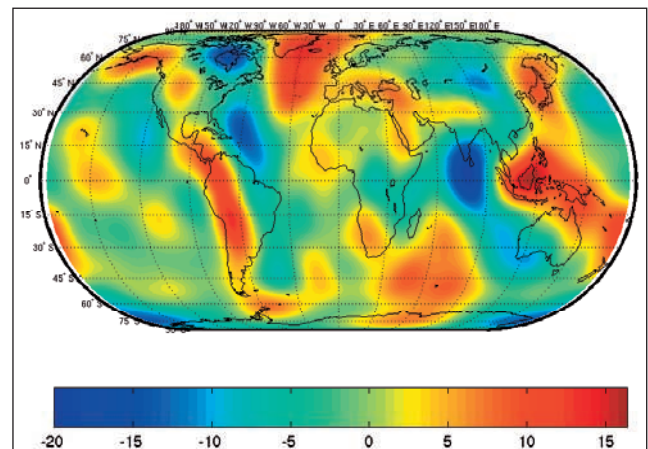
Abb. 9: Geoidundulationen auf  $\Omega_R$  zur Skala 4 in [m]

Abb. 10: Detail der Geoidundulation zur Skala 4 in [m]

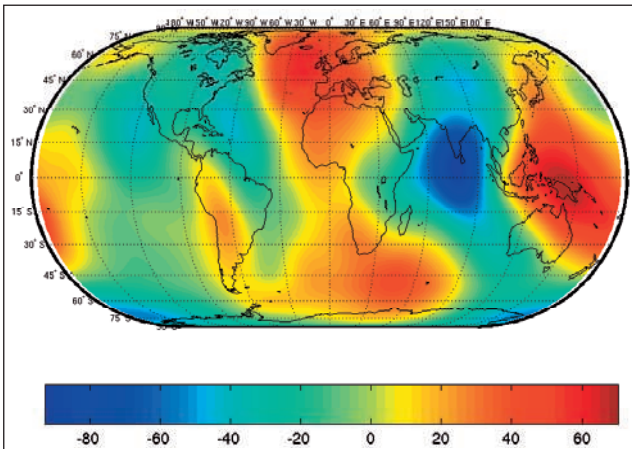


Abb. 11: Geoidundulationen auf  $\Omega_R$  zur Skala 5 in [m]

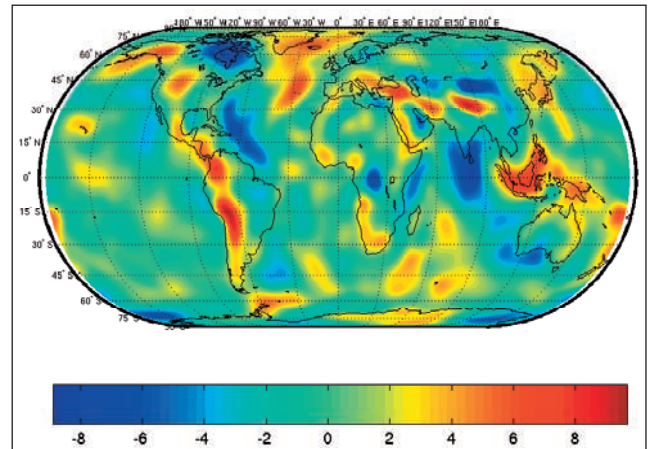


Abb. 12: Detail der Geoidundulation zur Skala 5 in [m]

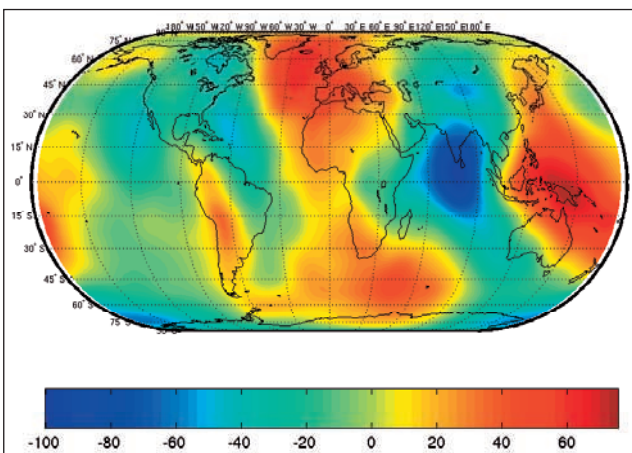


Abb. 13: Geoidundulationen auf  $\Omega_R$  zur Skala 6 in [m]

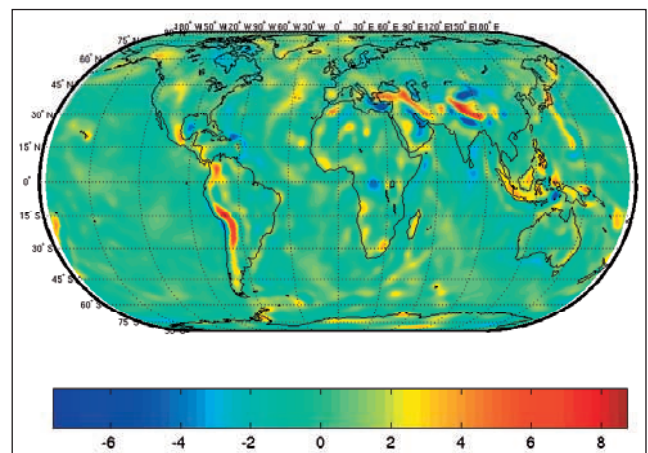


Abb. 14: Detail der Geoidundulation zur Skala 6 in [m]

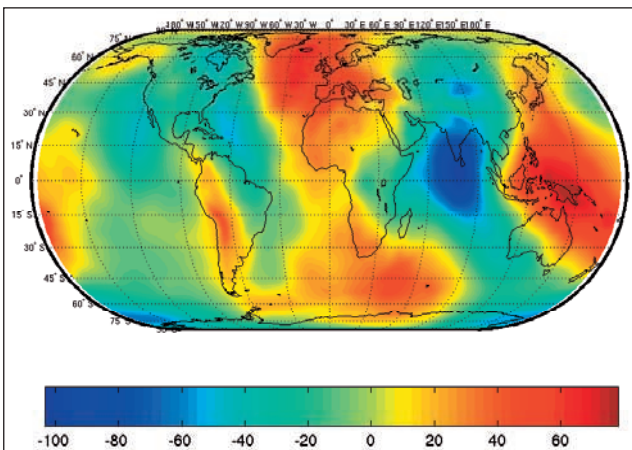


Abb. 15: Geoidundulationen auf  $\Omega_R$  zur Skala 7 in [m]

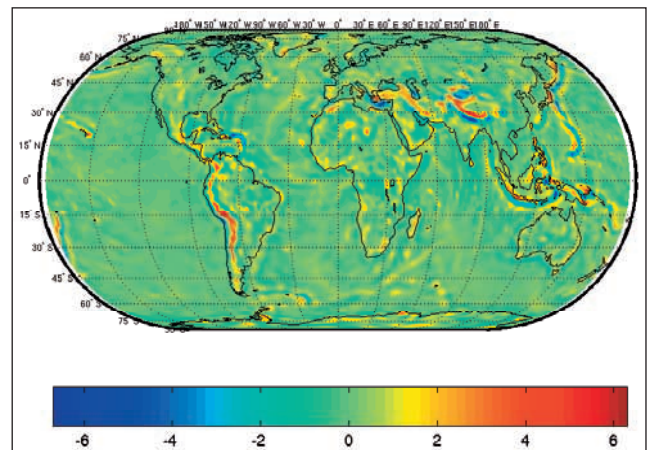


Abb. 16: Detail der Geoidundulation zur Skala 7 in [m]

Abb. 17: Geoidundulationen auf  $\Omega_R$  zur Skala 8 in [m]

