

Alternativen bei der Modellierung der Unsicherheit beim Messen

Hansjörg Kutterer und Steffen Schön

Zusammenfassung

Ein Messergebnis wird erst dann als vollständig angesehen, wenn es mit einer quantitativen Angabe zur Genauigkeit bzw. Unsicherheit versehen ist. Für die geodätische Praxis von besonderem Interesse sind Unsicherheitsmaße, die sich im statistischen Sinne konsistent interpretieren lassen, unabhängig davon, ob sie sich auf ursprüngliche oder abgeleitete Größen wie z.B. Punktkoordinaten beziehen. In diesem Beitrag werden verschiedene Möglichkeiten vorgestellt und diskutiert, mit denen die Unsicherheit beim Messen und ihre Übertragung auf abgeleitete Größen modelliert werden kann. Ein Vergleich auf Grundlage eines praxisorientierten Anforderungskatalogs an Unsicherheitsmaße legt nahe, die systematische Komponente der Unsicherheit nicht als Zufallsgröße, wie z.B. im »Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM)« vorgeschlagen, sondern verteilungsfrei anzusetzen.

Summary

In geodesy it is required to assign an uncertainty measure to the results of measurement. Mostly relevant for geodetic practice are uncertainty measures which can be interpreted in a statistical meaning and which can be propagated consistently to derived quantities such as point coordinates. In this paper, various possibilities are studied and compared which have been proposed in the literature. For this purpose a catalogue of requirements is formulated regarding practical needs. As the main result, distribution-free modelling of the systematic component of the uncertainty measure seems to be more adequate than choosing a stochastic approach. This is in contrast to the recommendations of the »Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM)«.

1 Einführung

In den messenden Disziplinen wie der Geodäsie wird ein Messergebnis erst dann als vollständig angesehen, wenn der durch die Messung ermittelte Wert mit einer quantitativen Angabe zur Genauigkeit versehen wird. Dies ist notwendig, um Messergebnisse einschätzen und mit anderen vergleichen zu können, vor allem, wenn sie zur Berechnung abgeleiteter Größen verwendet werden. Es bieten sich mehrere mögliche Zugänge, die jedoch auf Basis allgemein akzeptierbarer Anforderungen zu bewerten sind.

Die Quantifizierung von Genauigkeit ist unproblematisch, wenn man sich nur mit den zufälligen Abweichungen der Messwerte vom (unbekannten) wahren Wert befassen muss. Dann gibt das Mittel der Messwerte eine brauchbare Schätzung für den wahren Wert. Als Genauigkeitsangabe kann man die empirische Standardabwei-

chung der Messwerte verwenden bzw. aus ihr berechnete Radien von Konfidenzintervallen für den Mittelwert. Diese Art von Genauigkeit lässt sich (theoretisch) beliebig steigern, indem man den Wert der empirischen Standardabweichung des Mittelwertes durch die Wiederholung der Messung verringert.

Liegen neben den zufälligen auch systematische Messabweichungen vor bzw. können diese nicht grundsätzlich (durch geeignete Maßnahmen) ausgeschlossen werden, so streuen die Messwerte bei wiederholter Messung nicht um den wahren Wert, sondern um einen davon abweichenden. Ist eine Schätzung für den wahren Wert gesucht, so muss der Effekt der systematischen Abweichung berücksichtigt werden. Insbesondere genügt dann nicht die Angabe der empirischen Standardabweichung als Genauigkeitsmaß, da diese ausschließlich die zufällige Streuung um einen mittleren Modellwert widerspiegelt.

Zur Motivation sollen zwei Beispiele angeführt werden. So wird bei geodätischen Echtzeitanwendungen des GPS eine *Momentaufnahme* bestimmt. Diese ist von vielen systematisch wirkenden Einflüssen überlagert, deren Bedeutung mit wachsender Länge der Basislinie zunimmt. Außerdem nutzen moderne Tachymeter die *Wiederholung* von Messungen über einen kurzen Zeitraum, um die Auswirkungen zufälliger Einflüsse »auszumitteln«. Systematisch wirkende, kurzzeit-konstante (wie z.B. refraktionsbedingte) Effekte bleiben davon unberührt.

Für den Bereich der Ingenieurgeodäsie gibt es verschiedene Normen, die sich mit den Themenbereichen »Messtechnik«, »Ingenieurvermessung« und »Qualitäts sicherung« befassen (DIN 1998). Zusammen mit dem »Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen« (DIN 1999), der im Folgenden kurz GUM entsprechend der englischen Originalbezeichnung *Guide to the expression of uncertainty in measurement* genannt wird, sind sie Ausgangspunkt der folgenden Darlegungen. Der GUM hat Eingang in weite Bereiche der Messtechnik gefunden und spielt eine zentrale Rolle bei der Qualitätssicherung auf Basis von DIN-Normen (Heister und Staiger 2001).

Eine aktuelle Kritik der Definition der Messunsicherheit im GUM findet man bei Schmidt (2003), der Kernprobleme der Unsicherheitsmodellierung anspricht und einige Ansätze vergleicht. Offen bleibt dabei, wie denn mit unbekannten bzw. nach Vorverarbeitungsschritten in den Messwerten verbleibenden Systematiken praktisch zu verfahren sei. Entsprechende Fragestellungen spiegeln sich in einer Reihe von Arbeiten der Autoren, insbesondere Kutterer (2002) und Schön (2003).

Das Anliegen dieser Arbeit ist mehrschichtig. Zunächst wird ein Anforderungsprofil entworfen, das an Maße für

die Unsicherheit der Messung angelegt werden kann, die aus zufälligen und systematischen Messabweichungen abgeleitet werden sollen (Abschnitt 3). Anschließend werden verschiedene Modellansätze zur Bestimmung der Messunsicherheit vorgestellt und diskutiert – zusammen mit den sich ergebenden Methoden. Diese Ansätze können in zwei Gruppen eingeteilt werden: in solche, die auf Basis der Wahrscheinlichkeitstheorie ausschließlich von Zufallsvariablen ausgehen (Abschnitt 4) und in solche, bei denen die Unsicherheit über systematische Abweichungen durch Fehleränder beschrieben wird (Abschnitt 5). Schließlich werden die jeweiligen Modellansätze mit dem Anforderungsprofil verglichen, um sie kritisch zu werten und eine abschließende Empfehlung für die geodätische Praxis auszusprechen (Abschnitt 6).

Die aktuellen Ausführungen zielen unmittelbar auf die geodätische Praxis, denn die Kenngrößen bzw. Methoden der beurteilenden Statistik wie Konfidenzbereiche bzw. Signifikanztests sollen sich möglichst gut an die relevanten Aufgabenstellungen anpassen. Über die konkreten Empfehlungen hinaus bieten sie eine methodische Grundlage, um Messergebnisse und aus ihnen abgeleitete Größen realistischer einschätzen zu können. Insbesondere aber gestattet ein durchgreifendes Konzept zur Modellierung und Übertragung von Unsicherheit die praxisgerechte Optimierung von Messanordnungen (siehe z. B. Schön 2003).

2 Grundlegende Definitionen und Vereinbarungen

Zunächst werden die Begriffe definiert, die für das Verständnis der Ausführungen wichtig sind. Referenz hierfür ist vor allem die DIN 1391-1: »Grundlagen der Messtechnik – Grundbegriffe« (DIN 1998).

Als *Messgröße* bezeichnet man die physikalische Größe, der die Messung gilt. Eine *Messung* ist das Ausführen von geplanten Tätigkeiten zum quantitativen Vergleich der Messgröße mit einer Einheit. Der *wahre Wert* der Messgröße stellt das Ziel der Auswertung von Messungen dar. Der *richtige Wert* hingegen ist ein bekannter Wert für Vergleichszwecke, der als hinreichender Ersatz für den wahren Wert dienen kann. Das *Messergebnis* ist ein aus Messungen (unter Anwendung statistischer Schätzmethoden) gewonnener Schätzwert für den wahren Wert einer Messgröße.

Unter einer *Messabweichung* versteht man die Abweichung eines aus Messungen gewonnenen und der Messgröße zugeordneten Wertes vom wahren bzw. richtigen Wert. Man unterscheidet zwischen zufälligen und systematischen Messabweichungen. Letztere setzen sich im Allgemeinen additiv zusammen aus bekannten und unbekannten Komponenten. Die Messwerte sind um die bekannten Anteile der systematischen Messabweichung zu korrigieren. Dies wird im Folgenden vorausgesetzt, d. h. es werden nur die unbekannten Anteile der systematischen Messabweichung diskutiert.

Zufällige Messabweichungen werden in der Regel durch nicht beherrschbare Einflüsse verursacht. Sie spiegeln die Abweichung der Messwerte vom *Erwartungswert* (mittlerer Wert der Messgröße) wider, der nicht gleich dem wahren bzw. richtigen Wert sein muss, sondern aufgrund von systematischen Einflüssen von ihm abweichen kann. *Systematische Messabweichungen* hingegen werden als Abweichung des Erwartungswertes der Messung vom wahren bzw. richtigen Wert definiert. Eine Trennung zwischen zufälligen und systematischen Messabweichungen ist nicht immer streng möglich. Dabei spielt die gewählte Messanordnung eine Rolle. DIN 1391-1 unterscheidet zwischen *Wiederholbedingungen*, bei denen systematische Messabweichungen unbemerkt bleiben, da nur die Messung selbst wiederholt wird, und *Vergleichsbedingungen*, mit denen sie statistisch abgeschätzt werden können, da die Situation der Messung durch Einsatz eines anderen Messverfahrens, eines anderen Beobachters oder durch andere äußere Bedingungen variiert wird.

Der Unterschied zwischen den Messabweichungen und der Messunsicherheit, die unten eingeführt wird, ist grundlegend. Messabweichungen sind Einzelwerte, deren Streuverhalten durch die Messunsicherheit quantifiziert wird. Die *Messunsicherheit* (oder kurz *Unsicherheit*) wird deshalb definiert als Kennwert, der aus Messungen gewonnen wird und zusammen mit dem Messergebnis zur Kennzeichnung eines Wertebereichs für den wahren Wert der Messgröße dient. Sie ist ein quantitatives Maß für den nur qualitativ zu verwendenden Begriff *Genaugkeit* und umfasst sowohl zufällige als auch systematische Komponenten – wird nicht differenziert, so sind im Folgenden beide gemeint. Kutterer (2002) bezeichnet die zufällige Unsicherheitskomponente auch als *Stochastizität*, um den Zusammenhang mit den anzuwendenden mathematischen Methoden anzudeuten, und die Komponente aufgrund von unbekannten systematischen Messabweichungen als *Impräzision*.

Der GUM (DIN 1999, S. 9 ff.) sowie die DIN 1319-1 (Abschnitt 3) weisen auf Methoden zur Bestimmung der zufälligen und der systematischen Unsicherheitskomponenten hin. Für die zufällige Komponente kommen unmittelbar statistische Methoden in Betracht auf Basis von Messungen unter Wiederholbedingungen. Sind Vergleichsbedingungen möglich, d. h. können die äußeren Bedingungen hinreichend variiert werden, so können Anteile an der systematischen Komponente verzufälligt und abgeschätzt werden. Auf diesem Wege werden die Komponenten »vom Typ A« der Messunsicherheit ermittelt. Weitere Methoden, die nicht auf statistischen Ansätzen beruhen, nutzen wissenschaftliche Einschätzungen von allen verfügbaren Informationen wie z. B. Daten aus früheren Messungen, Erfahrungen oder allgemeine Kenntnisse über Verhalten und Eigenschaften der relevanten Materialien und Messgeräte, Angaben des Herstellers, Daten von Kalibrierscheinen und anderen Zertifikaten sowie Unsicherheiten, die Referenzdaten aus Handbüchern zu-

geordnet sind (DIN 1999, S. 12). Derart ermittelte Komponenten der Messunsicherheit heißen »vom Typ B«.

Kutterer (2002, S. 58 ff.) diskutiert die Erfassung und Einschätzung der Impräzision und schlägt – analog den im GUM ausgesprochenen Empfehlungen – den Einsatz geeigneter entworfener Fragebögen vor, um das vollständige Ungewissheits- bzw. Unsicherheitsbudget der zu bestimmenden Größen angeben zu können; konkrete Beispiele findet man z.B. bei Rüeger (1996, S. 184) für die EDM oder bei Rüeger und Brunner (2000) für das geometrische Nivellement. In Erweiterung des GUM ist auch die durch Software und Auswerter verursachte Unsicherheit zu berücksichtigen. Dies soll hier nicht vertieft werden. Schön (2003) und Schön und Kutterer (2004) zeigen, wie auf Basis ursprünglicher Einflussgrößen systematisch bedingte Unsicherheitsbereiche konstruiert und quantifiziert werden können. Die Ausgangssituation entspricht der z.B. in Schwieger (1999), ihre Interpretation und die sich daraus ergebenden Konsequenzen hinsichtlich der Methodik unterscheiden sich jedoch wesentlich, da bei Schwieger Kovarianzmatrizen und bei Schön und Kutterer mengentheoretisch definierte Fehlerbänder erzeugt werden.

Abschließend zu diesem Abschnitt soll formal der grundlegende Zusammenhang zwischen den Größen angegeben werden, die an der Bestimmung eines Messwertes bzw. Messergebnisses beteiligt sind. Die verwendeten Symbole orientieren sich weitgehend an den DIN-Vorgaben. Zur Erleichterung des Verständnisses, aber ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit wird davon ausgegangen, dass sich der Wert x der Messgröße additiv zusammensetzt in der Form

$$x = x_{\text{wahr}} + \Delta x_{\text{zufällig}} + \Delta x_{\text{systematisch}} = x_{\text{wahr}} + \varepsilon + \Delta, \quad (1)$$

wobei x_{wahr} (in Abweichung von der in der DIN 18709-4 vorgegebenen Schreibweise mit hochgestellter Tilde) den wahren Wert bezeichnet, $\varepsilon := \Delta x_{\text{zufällig}}$ die Gesamtheit der zufälligen Abweichungen und $\Delta := \Delta x_{\text{systematisch}}$ die Gesamtheit der systematischen Abweichungen. Alle drei Summanden auf der rechten Seite sind unbekannt. Die Gesamtabweichung

$$w := x - x_{\text{wahr}} \quad (2)$$

als Differenz zwischen dem Wert der Messgröße und dem wahren Wert kann ausgedrückt werden als

$$w = \varepsilon + \Delta. \quad (3)$$

3 Anforderungskatalog

Im Folgenden wird ein Katalog von Anforderungen zusammengestellt, die Maße für die Unsicherheit von geodätischen Messungen mindestens erfüllen sollten, damit sie sich für die Messpraxis eignen. Dies bedeutet, dass die

erforderlichen Informationen grundsätzlich und mit vertretbarem Aufwand zugänglich sein müssen. Die Maße sollten den tatsächlichen Gegebenheiten bei der Messung möglichst gerecht werden. Schließlich sollten sie unabhängig davon anwendbar sein, ob die betrachteten Größen ursprüngliche Beobachtungen, Zwischen- oder Endergebnisse sind. Die Anforderungen lauten im Einzelnen:

a) Die Unsicherheitskomponenten sollen für alle Arten von Messungen und alle Typen quantifizierbarer Informationen gemeinsam behandelt, d.h. modelliert und verarbeitet, werden können, unabhängig davon, ob sie zufällige oder systematische Ursachen haben.

b) Die Betrachtungsweise soll mikroskopisch sein, d.h. der konkrete Fall soll interessieren. Sie soll nicht zwingend die Kenntnis eines Häufigkeitsverhalten voraussetzen.

c) Zufällige Unsicherheitskomponenten sollen sich durch Wiederholungsmessungen verringern lassen, systematische Komponenten jedoch nicht. Letztere sollen vielmehr nur durch geeignete Messanordnungen bestimmt und eliminiert bzw. durch zusätzliche, gezielte Variationen reduziert werden können.

d) Das Unsicherheitsmaß soll konsistent sein im Hinblick auf die Weiterverarbeitung der Messergebnisse. Dies betrifft zum einen die Erhaltung der Charakteristika der modellierten Unsicherheit, zum anderen die Anwendbarkeit der Verfahren der beurteilenden Statistik, also insbesondere die Bestimmung von Konfidenzbereichen und die Durchführung von Hypothesentests (siehe auch Schmidt 2003).

e) Die Methode zur Bestimmung von kombinierten Unsicherheitsmaßen soll leicht zu verstehen und einfach anzuwenden sein.

Die angegebenen Kriterien enthalten die in DIN (1999, S. IX) genannten Aspekte der *Universalität* (»Die Methode muß auf alle Arten von Messungen und alle Typen von Eingabedaten anwendbar sein, die bei Messungen verwendet werden«) und *Übertragbarkeit* (»Es muß möglich sein, die für ein Meßergebnis ermittelte Meßunsicherheit direkt als Komponente zur Ermittlung der Meßunsicherheit bei einer anderen Messung zu verwenden, bei der das erste Ergebnis verwendet wird«).

Die weiter genannte *Selbstkonsistenz* (»Sie (die Methode) muß sich direkt aus den beitragenden Komponenten herleiten lassen und unabhängig von der Gruppierung dieser Komponenten und ihrer Zerlegung in Unterkomponenten sein«) ist nur insofern repräsentiert, als die direkte Herleitbarkeit verlangt wird, die Unabhängigkeit von der Gruppierung jedoch nicht. Auf die Unabhängigkeit von der Gruppierung soll hier verzichtet werden, weil diese nur erfüllt werden kann, wenn zwischen unterschiedlichen Komponenten der Unsicherheit nur quantitativ, jedoch nicht qualitativ unterschieden werden soll. Da eine vertiefte Auseinandersetzung jedoch nur bei unterschiedlichen Arten von Unsicherheit sinnvoll erscheint, muss ein geeigneter Ansatz eine entsprechende Spezifizierung gestatten.

4 Wahrscheinlichkeitstheoretische Ansätze

4.1 Motivation

Eine Möglichkeit, zufällige und systematische Messabweichungen zu kombinieren, besteht darin, alle in Gl. (3) auftretenden Terme gleichermaßen als Zufallsvariable zu betrachten, um auf diesem Wege ein gemeinsames, kombiniertes Maß für die Messunsicherheit zu bestimmen. Im Falle der zufälligen Messabweichungen ist die Modellierung als Zufallsvariable schnell einsichtig, da sich der Messvorgang leicht als Experiment im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung begreifen lässt. Traditionell setzt man in der Geodäsie zufällige Messabweichungen als normalverteilte Zufallsvariable an.

Bei den systematischen Messabweichungen ist die Modellierung als Zufallsvariable nicht unmittelbar einsichtig. Vielmehr müssen neben der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen auch solche zugelassen werden, die Aussagen bzw. Einschätzungen betreffen und somit in der Regel nicht auf Basis statistischer Erhebungen erhalten werden, sondern auf Erfahrungen und Expertenwissen beruhen; vgl. hierzu Abschnitt 2. Dieser Ansatz wird sehr kontrovers diskutiert (z.B. Schmidt 2003), soll hier aber neutral behandelt werden. Eine vergleichbare Situation tritt auch bei den Bayes-Verfahren (Koch 2000) auf, wenn die Priori-Dichten der Parameter zu definieren sind. Dennoch beruhen die beiden folgenden Ansätze vollständig auf der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie, da sie das Bayes-Theorem nicht benötigen.

Im Falle der wahrscheinlichkeitstheoretisch begründeten Verknüpfung der beiden Zufallsvariablen wird die Varianz des Ergebnisses als Maß für die kombinierte Unsicherheit angegeben. Die strenge Vorgehensweise, die in Abschnitt 4.2 vorgestellt wird, beruht auf der Faltung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Ist nur die Varianz als Grundlage für ein Unsicherheitsmaß gesucht, so kann man diese auch einfacher auf der Basis des Fehlerfortpflanzungsgesetzes erhalten, da im Falle einer linearen Verknüpfung der Zufallsvariablen die Ergebnisdichte nicht benötigt wird. Für die Angabe von Konfidenzbereichen bzw. die statistische Prüfung von Hypothesen ist die Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsverteilung jedoch conditio sine qua non.

Zu den wahrscheinlichkeitstheoretisch begründeten Zugängen gehört auch der Ansatz, funktional nicht modellierte (oder nicht modellierbare) Einflussgrößen als Systematiken zu begreifen und in Form von Korrelationen in der zugeordneten Varianz-Kovarianzmatrix der Beobachtungen zu berücksichtigen. Unter gewissen zusätzlichen Annahmen (erweitertes Elementarfehlermodell) werden so die von Schwieger (1999) beschriebenen synthetischen Kovarianzmatrizen formuliert. Da sich jede (reguläre) Varianz-Kovarianzmatrix (umkehrbar eindeutig) in eine Diagonalmatrix transformieren lässt, gelten die folgenden Aussagen im Hinblick auf die Modellierung, Übertragung und Interpretation der Unsicherheit auch für diesen Ansatz.

4.2 Strenge Formulierung

Die zufällige und die systematische Messabweichung werden zunächst als Zufallsvariablen aufgefasst, die durch geeignete Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschrieben werden. Die jeweiligen Standardabweichungen werden dann als Unsicherheitsmaße verwendet. Im Falle der zufälligen Komponente $\underline{\varepsilon}$ (der Unterstrich bezeichne eine Zufallsvariable) verwendet man in der Geodäsie üblicherweise die Normalverteilung

$$\underline{\varepsilon} \sim N(0, \sigma_{\varepsilon}^2), \quad (4)$$

wobei man den Erwartungswert zu Null annimmt (Unverzerrtheit); die Standardabweichung sei mit σ_{ε} bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeitsdichte von $\underline{\varepsilon}$ ist

$$f(\underline{\varepsilon}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\varepsilon}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\underline{\varepsilon}}{\sigma_{\varepsilon}}\right)^2}. \quad (5)$$

Hingegen ist man im Falle der systematischen Komponente $\underline{\Delta}$ in der Regel auf Abschätzungen angewiesen. Diese können z.B. als untere und obere Grenzen für die möglichen Werte von $\underline{\Delta}$ vorliegen. Praktisch sind derartige Grenzen immer mit einer Restunsicherheit behaftet; zur besseren Übersichtlichkeit der Darstellung soll dieser Aspekt jedoch nicht vertieft werden.

Liegen keine weiteren Informationen vor bzw. geht man von der identischen Wahrscheinlichkeit für alle Alternativen aus, so kann eine Gleichverteilung

$$\underline{\Delta} \sim GV(-\Delta_r, \Delta_r) \quad (6)$$

mit der Dichtefunktion

$$g_{GV}(\Delta) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta_r}, & -\Delta_r \leq \Delta \leq \Delta_r \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (7)$$

angesetzt werden. Wie bei der zufälligen Komponente wird auch hier der Erwartungswert zu Null angenommen.

Sollen die Schranken zweckmäßigerweise so definiert werden, dass Werte in ihrer Nähe weniger wahrscheinlich sind als in der Nähe des Mittelpunktes Null, so bietet sich z.B. eine symmetrische Dreiecksverteilung

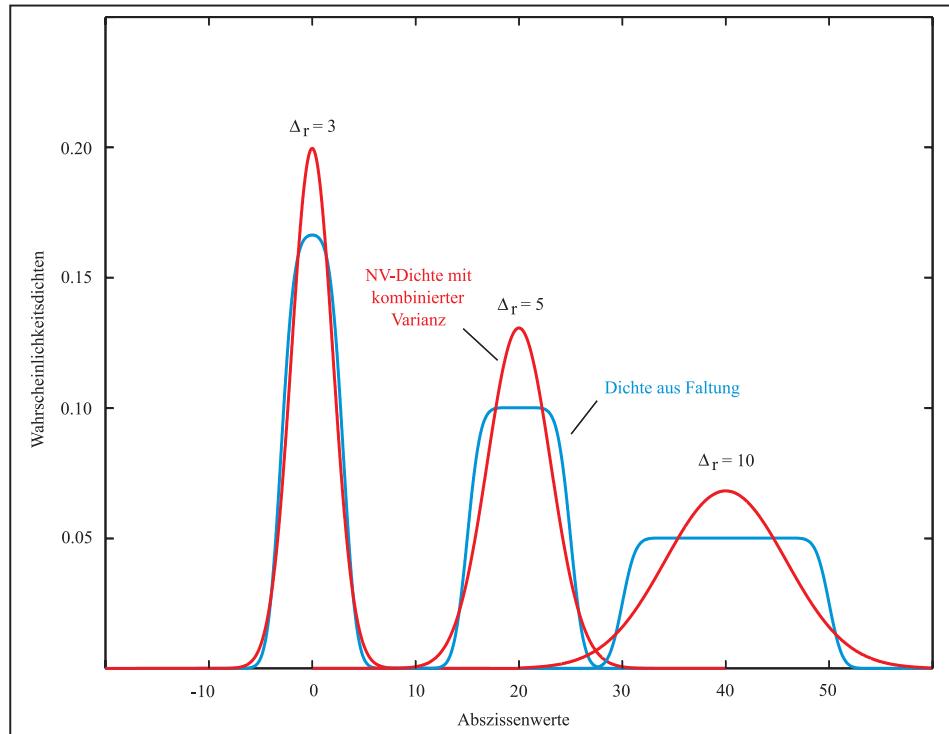
$$\underline{\Delta} \sim DV(-\Delta_r, \Delta_r) \quad (8)$$

mit der Dichtefunktion

$$g_{DV}(\Delta) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_r} \left(1 - \frac{|\Delta|}{\Delta_r}\right), & -\Delta_r \leq \Delta \leq \Delta_r \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (9)$$

an. Da sich die folgenden Ausführungen zur Gleichver-

Abb. 1: Dichten aus der Faltung einer Normal- und einer Gleichverteilung (in blau) gemäß Gl. (11) sowie die Dichten einer Normalverteilung mit entsprechenden kombinierten Varianzen (in rot) gemäß Gl. (17) für eine konstante Standardabweichung $\sigma_\varepsilon = 1$ und verschiedene Radien Δ_r



teilung leicht auf diesen Ansatz übertragen lassen, soll er nicht explizit betrachtet werden.

Der wahrscheinlichkeitstheoretisch strenge Weg zur Kombination von ε und Δ gemäß

$$w = \Delta x = \varepsilon + \Delta \quad (10)$$

besteht in der Faltung der beiden angesetzten Dichten. Aus der Ergebnisdichte folgt anschließend die Varianz, die man auch unmittelbar über das Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnen kann. Dazu soll die Beziehung

$$h(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(w - \Delta) g(\Delta) d\Delta \quad (11)$$

verwendet werden (Papoulis 1991, S. 136), die die Unabhängigkeit von f und g voraussetzt. Man kann h bei Gleichverteilung geschlossen analytisch ausdrücken. Für die im Rahmen dieser Arbeit angegebenen Zahlenwerte genügt aber eine numerische Lösung.

Das Maß für die Gesamtheitunsicherheit, die sich durch die Überlagerung der zufällig und der systematisch bedingten Anteile ergibt, folgt (im Allgemeinen ebenfalls über numerische Integration) direkt als Varianz der überlagerten Dichte

$$\sigma_w^2 = \int_{-\infty}^{\infty} w^2 h(w) dw = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\Delta^2 \quad (12)$$

mit

$$\sigma_\Delta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 g(\Delta) d\Delta . \quad (13)$$

Man erhält dieses Ergebnis auch direkt über das bekannte Fehlerfortpflanzungsgesetz, denn dieses gilt unabhängig von der jeweiligen Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Abb. 1 zeigt beispielhaft das Ergebnis der Faltung von Normalverteilung und Gleichverteilung für unterschiedliche Werte für Δ_r (Kurven in blau). Zur besseren Übersichtlichkeit der Darstellung sind die Dichten für unterschiedliche Werte von Δ_r um 20 Einheiten gegeneinander verschoben; der Erwartungswert ist jedoch in allen Fällen gleich Null.

Es ist leicht einzusehen, dass für die Bestimmung von Fraktilwerten, die sowohl für die Angabe von Konfidenzbereichen als auch für Hypothesentests benötigt werden, über die vorliegende Dichtefunktion zu integrieren ist. Beispielsweise gilt im Falle eines in w zentrierten $(1-\gamma)$ -Konfidenzintervalls

$$K_{1-\gamma}(w) = [w - w_r, w + w_r], \\ \text{mit } w_r \text{ so, dass } 1-\gamma = \int_{-w_r}^{w_r} h(w) dw , \quad (14)$$

wobei w_r den gemäß Gl. (14) berechneten Radius bezeichnet, d. h. die halbe Spannweite des Konfidenzintervalls. Für den Spezialfall, dass g die Normalverteilung bezeichnet, vereinfacht sich Gl. (14) zu

$$K_{1-\gamma}(w) = \left[w + k_{\frac{\gamma}{2}} \sigma_w, w + k_{1-\frac{\gamma}{2}} \sigma_w \right] , \quad (15)$$

wobei $k_{\frac{\gamma}{2}}$ und $k_{1-\frac{\gamma}{2}}$ die zugeordneten Fraktilwerte der Standardnormalverteilung bezeichnen.

4.3 Vereinfachte Formulierung

Der Aufwand zur Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen gemäß der in Abschnitt 4.2 beschriebenen Vorgehensweise hängt stark vom Typ der zu faltenden Verteilungen ab und ist im Allgemeinen eher hoch. In dem GUM (DIN 1999) wird ein Verfahren für die Berechnung der Gesamtunsicherheit vorgeschlagen, das auf der Wahrscheinlichkeitsrechnung beruht und für den Praktiker einfach anzuwenden ist. Man setzt, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben, sowohl die zufällige als auch die systematische Komponente der Messabweichung als Zufallsvariable an, wobei die zufällige Komponente wiederum durch eine Normalverteilung beschrieben wird und die systematische Komponente beispielsweise durch eine Gleich- oder Dreiecksverteilung.

Im Unterschied zur Vorgehensweise in Abschnitt 4.2 wird jedoch vorgeschlagen, die Varianzen der zufälligen und der systematischen Messabweichung mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes zu berechnen, das in diesem Kontext *Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz* genannt wird. Bei dieser Vorgehensweise werden explizit keine Dichten benötigt, denn auf der Ebene der Varianzen besteht Äquivalenz mit dem strengen Verfahren. Die Varianz der zufälligen Komponente σ_{ε}^2 der Messabweichung ist unmittelbar gegeben, die Varianz der systematischen Komponente folgt aus der Definition der Varianz bei Gleichverteilung als

$$\sigma_{\Delta}^2 = \frac{\Delta_r^2}{3}. \quad (16)$$

Die Gesamtvarianz beträgt schließlich

$$\sigma_w^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 + \sigma_{\Delta}^2. \quad (17)$$

Laut GUM (DIN 1999, S. 24) ist es zulässig, die ermittelten Standardabweichungen mit so genannten Erweiterungsfaktoren zu multiplizieren, um Bereiche angeben zu können, denen ein »bestimmter Grad des Vertrauens« zugeordnet ist. Es wird verdeutlicht, dass solche Bereiche nicht wahrscheinlichkeitstheoretisch verstanden werden können. Insbesondere handelt es sich nicht um Konfidenzbereiche.

Tab. 1: Radien der $(1-\gamma)$ -Konfidenzintervalle bei Verknüpfung der zufälligen und der systematischen Komponente der Messunsicherheit. Die zufällige Komponente ist als normalverteilt angesetzt mit der Standardabweichung $\sigma_{\varepsilon} = 1$, die systematische Komponente als gleichverteilt im Intervall $[-\Delta_r, \Delta_r]$. Die relativen Fehler beziehen sich auf den jeweiligen korrekten Wert.

Probleme treten bei der beschriebenen Vorgehensweise dann auf, wenn man Ergebnisse weiter verarbeiten bzw. analysieren möchte und die Verteilung der systematischen Komponente nicht (mehr) bekannt ist. Möchte man nun ersatzweise die *kombinierte Varianz* gemäß Gl. (17) ausschließlich einer Normalverteilung zuordnen (siehe Abb. 1: rote Kurven), um überhaupt weitere statistische Analysen durchführen zu können, so begeht man einen Fehler. Abb. 1 veranschaulicht dies am Beispiel der gefalteten Dichten von Normalverteilung und Gleichverteilung: Die Ergebnisdichte (Abb. 1: blaue Kurven) ähnelt mit wachsendem Δ_r immer mehr einer Gleichverteilung und immer weniger einer Normalverteilung.

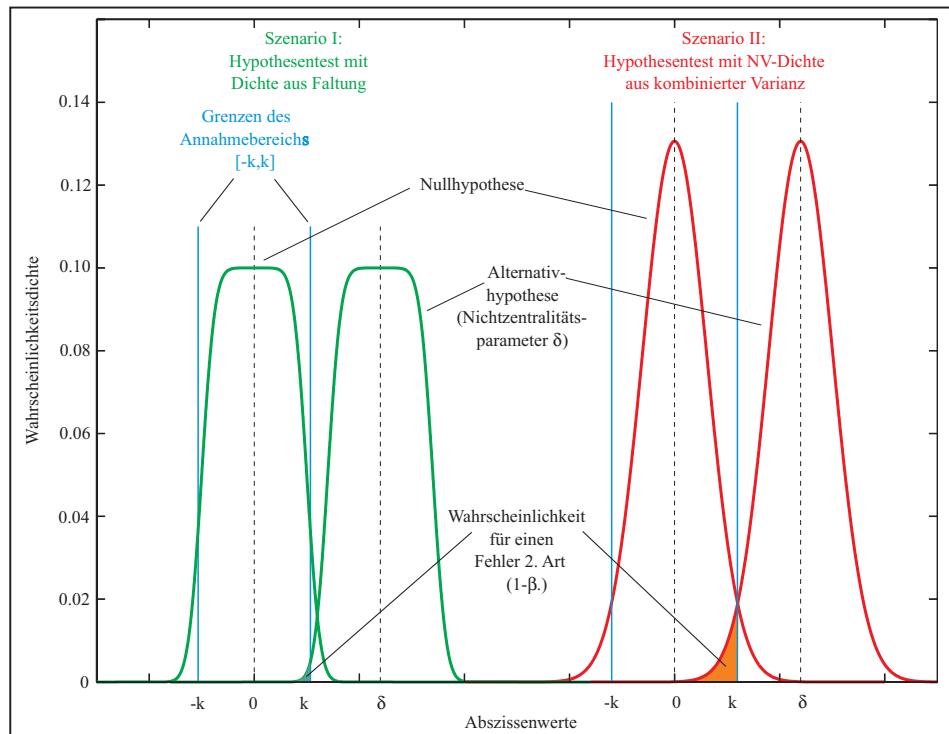
Die Varianz nach Gl. (17) entspricht der in Abschnitt 4.2 gemäß Gl. (12) berechneten. Unterschiede zwischen dem strengen Verfahren und dem genäherten ergeben sich aber z.B. für die Grenzen der zugeordneten $(1-\gamma)$ -Konfidenzintervalle $K_{1-\gamma}(w)$ für den Mittelwert. In Tab. 1 sind die Radien der Konfidenzintervalle bei Gleichverteilung der systematischen Komponente angegeben, die sich aus den unterschiedlichen Ansätzen bei Variation der Konfidenzwahrscheinlichkeit und des Intervallradius Δ_r ergeben. Als »korrekt« werden die gemäß Gl. (14) berechneten Werte bezeichnet, als »genähert« die nach Gl. (15) berechneten, wobei die jeweilige Varianz gemäß Gl. (17) bestimmt wurde. Die Ergebnisse werden hier kurz charakterisiert; eine vergleichende Diskussion wird in Abschnitt 6 erfolgen.

Offenbar liefert die Näherung größere Radien für die Konfidenzintervalle als die korrekte Lösung. Dies verstärkt sich bei zunehmender Bedeutung der systematischen Komponente, d.h. relativ zu σ_{ε} wachsendem Wert von Δ_r . Im Falle von $\Delta_r=3$ ist die Standardabweichung der kombinierten Größe z.B. doppelt so groß wie die der zufälligen Komponente. In diesem Falle beträgt der relative Fehler der Intervallgrenzen knapp 7 % für ein 95%-Konfidenzintervall bzw. knapp 15 % für ein 99%-Konfidenzintervall.

Vor dem Hintergrund von Hypothesentests können die Radien der jeweiligen Konfidenzintervalle auch direkt als Radien der Annahmebereiche verwendet werden. Bekanntlich sind (bei gegebener Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art) möglichst kleine Annahmebereiche wichtig, da die Nullhypothese H_0 (z.B. die für lineare Hy-

| Δ_r | σ_w | $(1-\gamma) = 0.95$ | | | $(1-\gamma) = 0.99$ | | |
|------------|------------|---------------------|----------|-------------|---------------------|----------|-------------|
| | | Korrekt | Näherung | Rel. Fehler | Korrekt | Näherung | Rel. Fehler |
| 0.1 | 1.00 | 1.96 | 1.96 | 0.00 | 2.58 | 2.58 | 0.00 |
| 0.5 | 1.04 | 2.04 | 2.04 | 0.00 | 2.68 | 2.68 | 0.00 |
| 1.0 | 1.15 | 2.25 | 2.26 | 0.00 | 2.94 | 2.97 | 0.01 |
| 2.0 | 1.53 | 2.90 | 3.00 | 0.03 | 3.66 | 3.93 | 0.07 |
| 3.0 | 2.00 | 3.67 | 3.92 | 0.07 | 4.49 | 5.15 | 0.15 |
| 5.0 | 3.06 | 5.34 | 5.99 | 0.12 | 6.26 | 7.87 | 0.26 |
| 10.0 | 5.86 | 9.81 | 11.48 | 0.17 | 10.9 | 15.09 | 0.40 |

Abb. 2: Unterschiede zwischen korrekter (in grün) und genäherter (in rot) Berechnung der Grenzen des Annahmebereichs beim Hypothesentest



pothesen immer zu realisierende $H_0: E(\underline{I}) = 0$ mit normal- oder t-verteilter Teststatistik \underline{I} bei Nichtzutreffen (triviale Alternativhypothese $H_a: E(\underline{I}) \neq 0$) schnell verworfen werden soll. Dazu sind die korrekten Werte günstiger als die genäherten, da erstere kleiner sind als letztere. Betrachtet man zudem eine bestimmte Alternativhypothese, die durch einen festen Nichtzentralitätsparameter δ charakterisiert werden kann ($H_a: E(\underline{I}) = \delta$), dann ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art (Verwerfen der Alternativhypothese fälschlicherweise zugunsten der Nullhypothese) für die genäherte Lösung größer als für die korrekte – und die Testgüte entsprechend kleiner. Dies wird durch die unterschiedliche mathematische Gestalt der angesetzten Dichten noch verstärkt; zur Veranschaulichung siehe Abb. 2. Deshalb ist die korrekte Berechnung der Ränder des Annahmebereichs (bzw. des Konfidenzintervalls) im Hinblick auf Irrtumswahrscheinlichkeit und Testgüte geeigneter als die genäherte – und bei sicherheitsrelevanten Aufgabenstellungen sogar dringend empfohlen.

5 Verteilungsfreie Modellierung von Systematiken

Scheidet eine Modellierung der systematischen Messabweichungen auf Basis der Wahrscheinlichkeitstheorie aus, so kommen Verteilungsfreie Ansätze in Betracht. Im Prinzip führen diese auf Unsicherheitsmaße, die auf Fehlerbändern beruhen, die entweder aus umfassenden experimentellen Untersuchungen und statistischen Analysen (analog dem Typ A beim GUM) oder wie im Falle des wahrscheinlichkeitstheoretischen Zugangs aus Expertenwissen und Erfahrungswerten abgeleitet werden – entsprechend dem Typ B. Tatsächlich können hier die identischen Informationen verwendet werden, die in der Re-

gel aus der Angabe einer unteren und einer oberen Grenze für den Variationsbereich bestehen; die Interpretation ist jedoch grundsätzlich anders. Siehe hierzu auch die DIN 1319-3 (S. 22) in DIN (1998).

In Abschnitt 4 bestand die argumentative Grundlage für das Ansetzen einer Gleichverteilung für die systematischen Abweichungen in der reinen Abschätzung ihrer Größenordnung. Analog lässt sich ohne Wahrscheinlichkeitstheoretische Hypothese ein Intervall angeben, das die möglichen systematischen Abweichungen beschreibt (Impräzision). Die Modellierung kann verfeinert werden, wenn das Auftreten einer kleinen systematischen Messabweichung eher möglich erscheint als das einer großen. Dann ist die Fuzzy-Theorie (z.B. Bandemer und Näther 1992; Kutterer 2002) zu verwenden. Dies soll jedoch hier nicht weiter betrachtet werden, da die hier wichtigen Aussagen und Ergebnisse denen des intervallmathematischen Ansatzes entsprechen.

Im Falle eines unbewerteten Fehlerbandes bietet sich die Intervallmathematik als Grundlage an. Ausgangspunkt ist die Modellierung der systematischen Komponente der Messunsicherheit in Form eines reellen Intervalls

$$[\Delta] = \{\Delta \in \mathbb{R} \mid -\Delta_r \leq \Delta \leq \Delta_r\} = [-\Delta_r, \Delta_r] = \langle 0, \Delta_r \rangle. \quad (18)$$

Die eckigen Klammern kennzeichnen die Darstellung eines Intervalls mittels unterer und oberer Grenze, die spitzen Klammern die Mittelpunkt-Radius-Darstellung. Die Zusammenhänge sind in Abb. 3 veranschaulicht.

Im Gegensatz zur Standardabweichung beim wahrscheinlichkeitstheoretischen Zugang ist nun der Intervallradius Δ_r Träger der Unsicherheitsinformation. Während Stan-

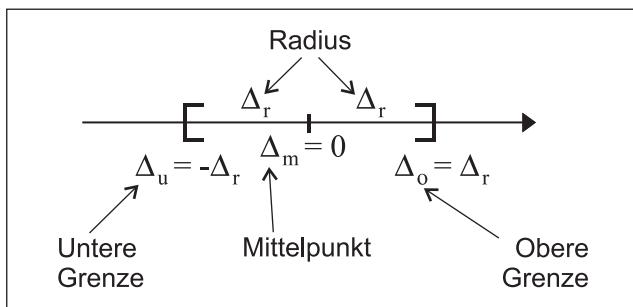


Abb. 3: Zusammenhang zwischen der Mittelpunkt-Radius-Darstellung eines Intervalls und seiner Darstellung mittels unterer und oberer Grenze am Beispiel der systematischen Komponente gemäß Gl. (18)

dardabweichungen unter Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes quadratisch zu addieren sind, werden die Intervallradien direkt, d.h. linear, addiert; siehe z.B. Kutterer (2002, 2003). Dies folgt aus den beiden Regeln

$$\begin{aligned} [x] + [y] &= \langle x_m + y_m, x_r + y_r \rangle \quad \text{Addition,} \\ a[x] &= \langle ax_m, |a|x_r \rangle \quad \text{Multiplikation mit} \\ &\qquad\qquad\qquad \text{einer reellen Zahl.} \end{aligned} \quad (19)$$

Die Vorgehensweise entspricht formal dem von Benning (2002, S. 83) angegebenen Fortpflanzungsgesetz für systematische Messabweichungen. Eine weitere formale Analogie besteht zur linearen Fortpflanzung von Toleranzen (Schwarz 1995).

Bei der Berechnung des Mittelwertes \bar{x} aus n unkorrelierten Messwerten x_i mit identischen theoretischen Standardabweichungen σ_x erhält man z.B. als Standardabweichung des Mittelwertes den Ausdruck

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}, \quad (20)$$

dessen Wert mit zunehmender Anzahl der Messungen kleiner wird, und für den Intervallradius den von n unabhängigen Ausdruck

$$\bar{x}_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_r = x_r, \quad (21)$$

Tab. 2: Vergleich der Radien der $(1-\gamma)$ -Konfidenzintervalle aus dem strengen wahrscheinlichkeitstheoretischen und dem verteilungsfreien Ansatz. Die zufällige Komponente ist als normalverteilt angesetzt mit der Standardabweichung $\sigma_\epsilon = 1$, die systematische Komponente als gleichverteilt (GV-Annahme) bzw. als nicht zufälliger, unbekannter Wert (verteilungsfrei) im Intervall $[-\Delta_r, \Delta_r]$. Die relativen Fehler beziehen sich auf die korrekten Werte aus der GV-Annahme.

wenn x_r den für alle Messwerte identischen Intervallradius angibt.

Zur Angabe eines Wertes für die kombinierte Unsicherheit ist es zweckmäßig, diesen aus der intervallmathematischen Erweiterung eines reellwertigen Konfidenzbereichs abzuleiten. Analog zu den in Abschnitt 4.3 angegebenen Gleichungen (14) und (15) ergibt sich das auf der zufälligen, normalverteilten Komponente der Messunsicherheit basierende $(1-\gamma)$ -Konfidenzintervall zu

$$K_{1-\gamma}(\epsilon) = \left[k_{\frac{\gamma}{2}} \sigma_\epsilon, k_{\frac{1-\gamma}{2}} \sigma_\epsilon \right] = \left[-k_{\frac{1-\gamma}{2}} \sigma_\epsilon, k_{\frac{1-\gamma}{2}} \sigma_\epsilon \right] = \left(0, k_{\frac{1-\gamma}{2}} \sigma_\epsilon \right). \quad (22)$$

Addiert man den Radius des Konfidenzintervalls und den der systematischen Messkomponente, so folgt für den Radius der kombinierten Größe

$$w_r = k_{\frac{1-\gamma}{2}} \sigma_\epsilon + \Delta_r. \quad (23)$$

Zur Herleitung und Vertiefung sei auf das Lehrbuch von Viertl (1996) sowie auf Kutterer (2003) und Schön (2003, S. 84 f.) verwiesen.

Soll die kombinierte Größe w weiter verwendet werden, müssen die zufällige und die systematische Komponente getrennt voneinander fortgepflanzt werden und am Ende der Rechnung wieder zusammengesetzt werden. Dies ist grundsätzlich in völliger Übereinstimmung mit dem GUM, in dem die Unsicherheitskomponenten nach der Methode ihrer Ermittlung getrennt werden; siehe z.B. DIN (1999, Abschnitte 3.3.3 und 3.4.8).

In Tab. 2 werden die Radien der Konfidenzintervalle verglichen, die man zum einen nach Gl. (14) auf Basis der Faltung der beteiligten Dichten und zum anderen nach Gl. (23) mit einer verteilungsfreien systematischen Komponente berechnen kann. Als Konfidenzwahrscheinlichkeiten sind 0.95 und 0.99 angesetzt. Es zeigt sich, dass die Radien im Falle einer verteilungsfreien systematischen Komponente deutlich größer sind als im streng wahrscheinlichkeitstheoretisch begründeten Fall. Nach

| Δ_r | σ_w | $(1-\gamma) = 0.95$ | | | $(1-\gamma) = 0.99$ | | |
|------------|------------|---------------------|-----------------|-------------|---------------------|-----------------|-------------|
| | | GV-Annahme | verteilungsfrei | Rel. Fehler | GV-Annahme | verteilungsfrei | Rel. Fehler |
| 0.1 | 1.00 | 1.96 | 2.06 | 0.05 | 2.58 | 2.68 | 0.04 |
| 0.5 | 1.04 | 2.04 | 2.46 | 0.21 | 2.68 | 3.08 | 0.15 |
| 1.0 | 1.15 | 2.25 | 2.96 | 0.32 | 2.94 | 3.58 | 0.22 |
| 2.0 | 1.53 | 2.90 | 3.96 | 0.37 | 3.66 | 4.58 | 0.25 |
| 3.0 | 2.00 | 3.67 | 4.96 | 0.35 | 4.49 | 5.58 | 0.24 |
| 5.0 | 3.06 | 5.34 | 6.96 | 0.30 | 6.26 | 7.58 | 0.21 |
| 10.0 | 5.86 | 9.81 | 11.96 | 0.22 | 10.9 | 12.58 | 0.15 |

anfänglichem Anstieg vermindert sich jedoch der relative Fehler mit zunehmender Größe der systematischen Komponente.

Im Hinblick auf die Größe des Annahmebereichs beim statistischen Hypothesentest lässt sich die Argumentation für die Näherungslösung in Abschnitt 4.3 analog auf die verteilungsfreie Modellierung übertragen. D. h. im verteilungsfreien Fall sind die Radien größer, wodurch man länger an einer (möglicherweise falschen) Nullhypothese festhält. Entsprechend reduziert sich die Testgüte; siehe hierzu auch Kutterer (2004). Im Gegensatz zu dem in Abschnitt 4.3 diskutierten Verhalten ist dieses Ergebnis im jetzigen Kontext plausibel, da sich unbekannte Systematiken Signifikanz mindernd auswirken.

6 Vergleich und Diskussion

In den Abschnitten 4 und 5 wurden verschiedene Ansätze vorgestellt, um die zufällige und die systematische Unsicherheitskomponente zu kombinieren. Nun sollen diese dem in Abschnitt 3 formulierten Anforderungskatalog gegenüber gestellt werden.

Alle gezeigten Ansätze sind grundsätzlich geeignet, alle Arten von Messungen und alle Typen quantifizierbarer Information gemeinsam zu behandeln. Zudem kann der jeweils vorliegende Fall gezielt betrachtet werden, ohne dass ein Häufigkeitsverhalten bekannt sein oder ermittelt werden muss. Die Katalogpunkte (a) und (b) werden somit erfüllt.

Auch das Verhalten der zufälligen und der systematischen Komponente bei Wiederholungsmessungen kann bei allen Ansätzen passend gesteuert werden (Katalogpunkt (c)). Dies ist jedoch einfacher bei den verteilungsfreien Verfahren nach Abschnitt 5, bei denen direkt entsprechende Rechenregeln greifen (vgl. hierzu Gl. (21)). Bei den wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansätzen muss dies gezielt implementiert werden. Dies kann zum einen in Form von entsprechend formulierten Typ-B-UNSicherheitskomponenten gemäß GUM geschehen und zum anderen genähert durch Einführen von Korrelationen zwischen den Beobachtungen auf Basis des Elementarfehlermodells (siehe Abschnitt 4.1). Um zu verhindern, dass systematische Unsicherheitskomponenten durch »Herausmitteln« reduziert werden können, müssen funktionale Abhängigkeiten erzeugt werden; dazu ist jedoch ein maximaler Korrelationskoeffizient anzusetzen.

Im Hinblick auf die Weiterverarbeitung der Ergebnisse (Katalogpunkt (d)) zeigen sich Unterschiede zwischen den Ansätzen. Generell lässt sich sagen, dass die wahrscheinlichkeitstheoretisch begründeten Ansätze (Abschnitt 4) dieses Kriterium nur dann erfüllen, wenn konsequent mit den Verteilungsfunktionen gearbeitet wird. Beschränkt man sich auf Varianzen bzw. Varianz-Kovarianzmatrizen, so sind, auch im Falle des Elementarfehlermodells, die abgeleiteten Unsicherheitsmaße zu pessimistisch und

vor allem nicht statistisch interpretierbar; siehe hierzu auch DIN (1999, Abschnitt 6.3.2). Auf ihnen aufbauende Hypothesentests sind zwar möglich, aber inkonsistent hinsichtlich der Voraussetzungen sowie reduziert sensitiv im Hinblick auf falsche Nullhypotesen (d. h. es besteht eine größere Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art bei Zutreffen von $E(\bar{T}) = \delta \neq 0$).

Bei der verteilungsfreien Modellierung (Abschnitt 5) ist die konsistente Weiterverarbeitung möglich; siehe vor allem Kutterer (2002). Dies gilt im Hinblick auf erweiterte Konfidenzbereiche (Kutterer 2003, Schön und Kutterer 2004) und auf statistische Hypothesentests mit impräzisen Daten (Kutterer 2004). Daneben ist die um den Aspekt vernachlässiger Systematiken erweiterte Analyse und Optimierung geodätischer Messanordnungen zu nennen (Schön 2003).

Alle vorgestellten Ansätze sind leicht zu verstehen. Bis auf den strengen wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansatz (Abschnitt 4.2), bei dem Dichtefunktionen (in der Regel mit Hilfe numerischer Näherungsverfahren) zu falten sind und der somit nicht den Katalogpunkt (e) erfüllt, können sie auch einfach umgesetzt und angewendet werden.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass ausschließlich die verteilungsfreien Verfahren alle in Abschnitt 3 formulierten Anforderungen erfüllen. Auf die wahrscheinlichkeitstheoretischen Verfahren trifft dies nur zu, wenn sowohl die zufälligen als auch die systematischen Messabweichungen normalverteilt sind – denn dann ist die Dichtefunktion durch den Erwartungswertvektor und die Varianz-Kovarianzmatrix bereits eindeutig definiert. Dieser Fall ist jedoch nicht für die Praxis motivierbar, sondern von rein theoretischem Interesse.

7 Schlussbemerkungen

Die Quantifizierung der Unsicherheit von Messwerten und deren Übertragung auf abgeleitete Größen ist zentrales Thema des GUM (DIN 1999). Eine wichtige Voraussetzung ist die im GUM umfassend erörterte Analyse von Messprozessen, die es erlaubt, die relevanten Einflussfaktoren zu identifizieren. Diese Analyse stellt einen wesentlichen Nutzen des GUM dar, denn sie bedeutet, dass sich jeder Anwender intensiv mit dem Unsicherheitshaushalt auseinandersetzen sollte. Weiter werden im GUM Empfehlungen für ein Unsicherheitsmaß ausgesprochen, das sowohl zufällige als auch systematische Unsicherheitskomponenten berücksichtigt.

Prüft man die Eigenschaften dieses Maßes vor dem Hintergrund der Tauglichkeit für die geodätische Praxis, so werden jedoch schnell einige wesentliche, im gewählten Modellansatz nicht behebbare Unzulänglichkeiten deutlich. Nicht zuletzt stellt sich die Frage nach dem Nutzen eines Unsicherheitsmaßes, das nur angegeben, jedoch nicht weiterverwendet werden kann. Zudem besteht die

Gefahr, dass die im statistischen Sinne nicht interpretierbare »erweiterte Unsicherheit« falsch verstanden und benutzt wird. Für sicherheitsrelevante Aufgabenstellungen wie Überwachungsmessungen, bei denen ein verlässliches Signifikanzniveau festzulegen ist, ist dies ein nicht zu unterschätzendes Defizit.

Die verteilungsfreie Modellierung auf Basis der Intervallmathematik (bzw. der Fuzzy-Theorie) weist diese Unzulänglichkeiten nicht auf. Sie gestattet eine plausible und realitätsnahe Übertragung der zufälligen und der systematischen Unsicherheitskomponente auf die gesuchten Größen ebenso wie die Quantifizierung interpretierbarer Konfidenzbereiche (Schön und Kutterer 2004) und die Durchführung von Hypothesentests bei Restsystematiken (Kutterer 2004).

Im Hinblick auf die praktische Anwendung ist deshalb zu empfehlen, zufällige und systematische Abweichungen und die mit ihnen verbundenen bzw. aus ihnen resultierenden Unsicherheitskomponenten spezifisch, d. h. getrennt voneinander zu quantifizieren und zu behandeln. Werden zusammengesetzte Unsicherheitsmaße benötigt, so sollten sie gemäß den Darstellungen in Abschnitt 5 (im Gegensatz zu den Vorgaben des GUM) verknüpft werden.

Weiterhin ungeklärt bleibt der tatsächliche Mechanismus, mit dem sich systematisch wirkende Einflüsse auf Ergebnisgrößen übertragen. Die lineare Übertragung gemäß Gl. (19), die z. B. auch in Schmidt (2003) angegeben wird, ist lediglich ein Postulat. Zu seiner Gültigkeit bzw. Anwendbarkeit ist es mindestens notwendig, die Betrachtung auf unkorrelierte bzw. unabhängige elementare Einflussgrößen zurückzuführen, wie dies im Elementarfehleransatz (Pelzer 1985, Schwieger 1999) und im Intervallansatz (Schön 2003) geschehen kann. Für eine konkrete praxistaugliche Vorgehensweise bei der Ermittlung der systematischen Unsicherheitskomponente sind jedoch noch weitere, vor allem experimentelle Untersuchungen erforderlich. Hierzu wäre eine konstruktive Diskussion innerhalb der messenden Geodäsie hilfreich.

Dank

Der vorliegende Aufsatz beruht im Wesentlichen auf Arbeiten der beiden Autoren während ihrer Zeit am Deutschen Geodätischen Forschungsinstitut (DGFI) in München. Ein herzlicher Dank geht deshalb an den Direktor des DGFI, Herrn Hon.-Prof. Hermann Drewes, für die Unterstützung der Untersuchungen sowie an die ehemaligen Kollegen für die Hilfestellungen und Diskussionen. Ein Teil der Arbeiten wurde im Rahmen der DFG-Sachbeihilfe KU 1250/1 durchgeführt.

Literatur

- Bandemer, H., Näther, W.: *Fuzzy Data Analysis*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.
- Benning, W.: *Statistik in Geodäsie, Geoinformation und Bauwesen*. Wichmann, Heidelberg, 2002.
- DIN: *Vermessungswesen*. DIN-Taschenbuch 111. Beuth, Berlin – Wien – Zürich, 1998.
- DIN: *Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen*. DIN V ENV 13005, 1999.
- Heister, H., Staiger, R. (Hrsg.): *Qualitätsmanagement in der geodätischen Messtechnik*. Schriftenreihe des Deutschen Vereins für Vermessungswesen, Band 42, Wittwer, Stuttgart, 2001.
- Koch, K.-R.: *Einführung in die Bayes-Statistik*. Springer, Berlin – Heidelberg, 2000.
- Kutterer, H.: *Zum Umgang mit Ungewissheit in der Geodäsie – Baustein für eine neue Fehlertheorie*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 553, München, 2002.
- Kutterer, H.: Joint treatment of random variability and imprecision in GPS data analysis. *Journal of Global Positioning Systems*, Vol. 1, No. 2: 96–105, 2003.
- Kutterer, H.: Statistical hypothesis tests in case of imprecise data. Proceedings of the 5th Hotine-Marussi Symposium, Springer, Berlin, 2004, im Druck.
- Papoulis, A.: *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes* (3. Aufl.). McGraw-Hill, New York, 1991.
- Pelzer, H.: Grundlagen der mathematischen Statistik und der Ausgleichsrechnung. In: Pelzer, H. (Hrsg.): *Geodätische Netze in der Ingenieur- und Landesvermessung II*. Wittwer, Stuttgart, 1985.
- Rüeger, J.-M.: *Electronic Distance Measurement – An Introduction* (4. Aufl.). Springer, New York – Berlin – Heidelberg, 1996.
- Rüeger, J.-M., Brunner, F. K.: On System Calibration and Type Testing of Digital Levels. *ZfV* 125, S. 120–130, 2000.
- Schmidt, H.: Warum GUM? – Kritische Anmerkungen zur Normdefinition der »Messunsicherheit« und zu verzerrten »Elementarfehlermodellen«. *zfv* 128, S. 303–312, 2003.
- Schön, S.: Analyse und Optimierung geodätischer Messanordnungen unter besonderer Berücksichtigung des Intervallansatzes. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 567, München, 2003.
- Schön, S., Kutterer, H.: Realistic uncertainty measures for GPS observations. In: Proceedings der IUGG XXIII General Assembly, Sapporo, Japan, 2004, im Druck.
- Schwarz, W.: *Vermessungsverfahren im Maschinen- und Anlagenbau*. Wittwer, Stuttgart, 1995.
- Schwieger, V.: Ein Elementarfehlermodell für GPS-Überwachungsmessungen – Konstruktion und Bedeutung interepochaler Korrelationen. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Heft Nr. 231, Hannover, 1999.
- Viertl, R.: *Statistical Methods for Non-Precise Data*. CRC Press, Boca Raton – New York – London, 1996.

Anschrift der Autoren

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Hansjörg Kutterer
Universität Hannover, Geodätisches Institut
Nienburger Straße 1, D-30167 Hannover
Tel.: 0511 762-2461, Fax: 0511 762-2468
kutterer@gih.uni-hannover.de

Dr.-Ing. Steffen Schön
Institut für Ingenieurgeodäsie und Messsysteme, TU Graz
Steyrergasse 30, A-8010 Graz
Tel.: ++43 316 873-6325, Fax: ++43 316 873-6820
steffen.schoen@tugraz.at