

Schattenmessung mit dem Gnomon

Helmut Minow

Zusammenfassung

Der »Sonnenzeiger«, der Gnomon, so sein griechischer Name, gilt als das älteste und einfachste astronomisch-geodätische Messgerät. Doch ist dieses antike Messinstrument in der Fachliteratur kaum beachtet worden, obwohl es für die Entwicklung der Naturwissenschaften eine wichtige Rolle spielte. Im Altertum verwendeten Babylonier und Ägypter den Schattenstab zur Bestimmung der Sonnenwenden und Tagundnachtgleichen sowie als Sonnenuhr. Bereits in frühgeschichtlicher Zeit wurde beobachtet, dass ein senkrecht eingesetzter Stab im Tagesverlauf unterschiedliche Schatten wirft. Für die Absteckung von Bauwerken war das Verfahren mit dem »Indischen Kreis« von Bedeutung. Im europäischen Mittelalter erscheint das Gnomon-Prinzip auf den damals gebräuchlichen Messgeräten als Schattenquadrat.

Summary

The so-called »sun style«, for which the Greek name is Gnomon (»one who knows«), is one of the oldest and simplest astro-geodetic instruments. But this ancient observation instrument has hardly ever been considered in technical literature, although it played a big role in the development of natural sciences. In ancient times, Babylonians and Egyptians used the shadow rod not only to determine the solstices and equinoxes, but also as sundial. Even in early times it was noticed that a simple vertical stick throws shadows of different lengths over the course of the day. The technique of the »Indian circle« was of great importance for pegging out building plots. In the European medieval times, the Gnomon principle appeared as a shadow-square on the observation instruments of that time.

1 Der Schattenstab

An einem hellen Sommertag zieht ein Viehhirte mit seiner Herde über das ebene Weideland. Die Sonne steht bereits über dem Horizont. Vielleicht rein zufällig steckt der Hirte seinen Stab senkrecht in den ebenen Boden. Das ist Anlass zu der Beobachtung, dass der Schatten, den die Sonne wirft, entsprechend dem Sonnenstand verschiedene Richtungen einnimmt und dabei seine Länge ändert (Abb. 1). So mag in frühgeschichtlicher Zeit die Schattenbeobachtung begonnen haben.

Auch wurde der scheinbare Lauf der Sonne schon in früher Zeit zur Zeitmessung benutzt; denn keine andere Erscheinung beeinflusst das Leben so sehr wie der stetige Wechsel von Helligkeit und Dunkelheit, von Tag und Nacht: Täglich geht die Sonne »im Osten« auf, kulminiert mittags (um 12 Uhr wahrer Sonnenzeit) auf dem Ortsmeridian (»Mittaglinie«) und geht »im Westen« unter.

Die Erkenntnis, dass der Schatten des Stabes am kürzesten ist, wenn die Sonne am höchsten steht, und dass

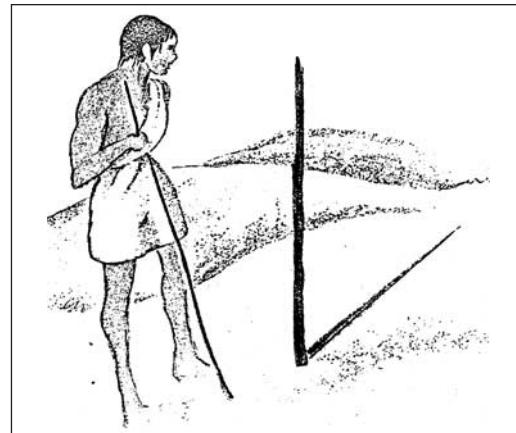


Abb. 1: Hirtenstab als Gnomon

die längsten Schatten bei Sonnenaufgang und bei Sonnenuntergang auftreten, scheint sehr alt zu sein. Als man herausfand, dass zwischen der Schattenlänge und der Tageszeit bzw. der Jahreszeit ein gewisser Zusammenhang besteht, führte dies zur Einrichtung von Sonnenuhren (Bauer 1998). Wann und wo begonnen wurde, die Länge des Sonnenschattens auch messtechnisch zu erfassen, lässt sich nicht feststellen.

Als Gerät zum Bestimmen von Azimut und Höhe der Sonne war der Schattenstab in der Antike in Mesopotamien, bei den Griechen und auch bei den Chinesen (Minow 1981) bekannt, wenn auch mit unterschiedlichen Bezeichnungen. Bei den Griechen war es die Skaphe, »Schüssel« – eine ausgehöhlte, nach oben offene Halbkugel –, in deren Mitte als Schattenwerfer ein senkrecht stehender Stab (Gnomon, Polos oder Kanon) angebracht war. Im lateinischen Mittelalter nannte man den Schattenstab gelegentlich sciotherum »Schattennehmer«, stylus »Pfeiler«, »Säule«, virga »Rute«, hasta »Lanze« oder harundo »Rohr«. Bei den Indern hieß das Gerät sanku (»Stab«) und in den arabischen Kulturen unter anderem miqās »(Schatten-)Messer« (Schmidt 1935, Reprint 1988).

2 Der Obelisk

Bei den Ägyptern erscheint der Schattenstab als monumental Obelisk (Abb. 2). Vermutlich hatten die dortigen Priester und Gelehrten schon in den frühen Perioden Schattenmessungen während der Sonnenwenden vorgenommen.

Nach der Eroberung Ägyptens durch die Römer ließ Kaiser Augustus einen der ägyptischen Obelisen nach Rom bringen und als Prestigeobjekt auf dem Marsfeld aufstellen (Abb. 3). Der Obelisk war etwa 30 m hoch, seine Schatten waren bis zu 100 m lang. Dieser Obelisk steht heute in der Nachbarschaft seines früheren römischen

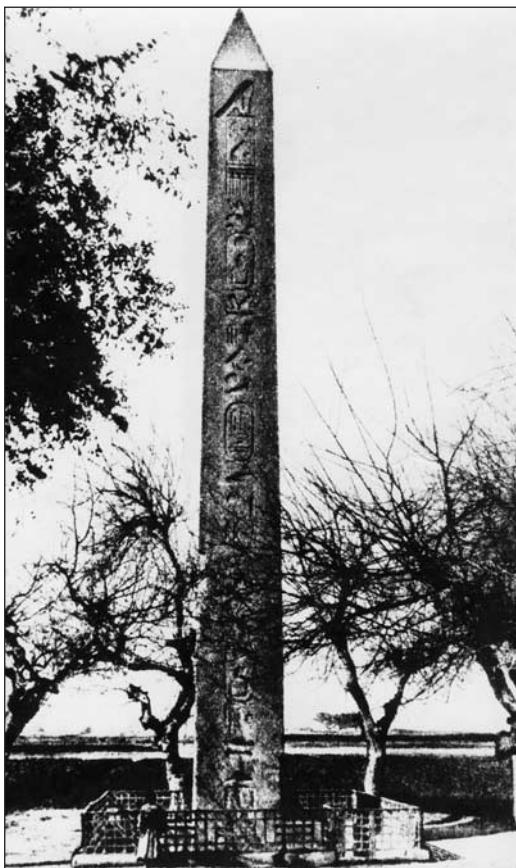


Abb. 2: Obelisk in Ägypten

Standorte auf der Piazza Monte Citoria (Buchner 1976). Die 1982 begonnenen Ausgrabungen sollen den Bestand aus römischer Zeit freilegen.

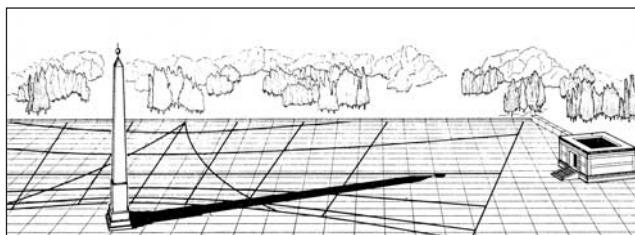


Abb. 3: Obelisk des Kaisers Augustus in Rom, aus Buchner (1976)

3 Im antiken Griechenland

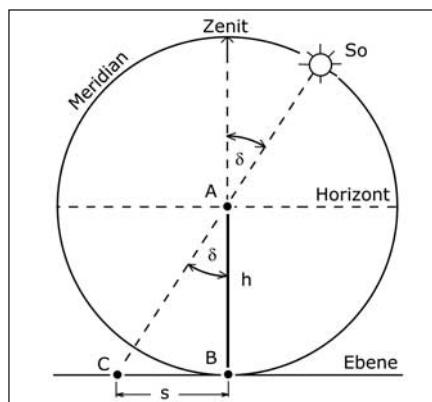
In der älteren griechischen Literatur wird der Gnomon kaum erwähnt; abgesehen von einer Textstelle in den Historien des Herodot (II, 109). Dort wird berichtet, dass die Griechen den Gebrauch von Gnomon und Polos von den Babylonieren erlernt hätten.

Es gibt Spuren, die verraten, dass der Gnomon zumindest seit dem 6. Jahrhundert v. Chr. ein wohl bekanntes wissenschaftliches Instrument war. In der mathematischen Literatur der Griechen wurde für den Begriff »die Senkrechte« das Wort »nach dem Gnomon« gebraucht, »weil auch der Gnomon mit dem Horizont rechte Winkel bildet«. Bedeutsam ist, dass der Name des Instrumentes

auch zu einem Terminus in Geometrie und Arithmetik wurde (Szabó 1992).

In der griechischen Überlieferung wird die »Erfindung« des Gnomons dem Anaximandros aus Milet (ca. 611–546 v. Chr.) zugeschrieben, der nach Diogenes Laërtos einen Gnomon in Sparta errichtet haben soll, um die Äquinoktien (Tagundnachtgleichen) festzustellen. Nach Ptolemaios (Almagest III, 1) haben die Astronomen Meton und Euktemon die Sonnenwende im Jahre 432 v. Chr. mit Hilfe des Gnomons beobachtet (Fehler: nur etwa ein Tag). Dazu hatte man in Athen den Gnomon errichtet, einen oben angespitzten, senkrecht auf horizontaler Unterlage stehenden Stab von bekannter Länge (h).

Dessen Schattenlänge (s) erlaubte es, die Höhe (δ) der Sonne über dem Horizont zu ermitteln (Abb. 4); $\tan \delta = s : h$. Mit diesem Gerät konnten die Veränderungen der Sonnenhöhe im Laufe eines Jahres und damit die Bahn der Sonne messtechnisch erfasst sowie auch der Kalender verbessert werden.

Abb. 4:
Der Gnomon
in Athen

Jedenfalls wurde erkannt:

- Am Tag der Sommersonnenwende ist der Schatten am kürzesten, dagegen am Tag der Wintersonnenwende am längsten.
- An jedem Mittag, wenn im Tageslauf der Schatten am kürzesten ist, zeigt der Gnomon den Meridian, die Südrichtung, an.
- Das Azimut der Sonne ergibt sich aus dem Horizontalwinkel zwischen Schatten- und Nord-Süd-Richtung.
- Solange die Sonne in einem Winkel über 45° steht, ist der Sonnenschatten kürzer als der Stab.
- Erreicht die Sonne die Höhe von 45° , dann ist der Schatten gleich der Länge des Stabes.
- Sinkt die Sonne unter 45° , wird der Schatten länger als der Stab (Hultsch 1912).

Überdies wurde der Gnomon zur Bestimmung der Polhöhe benutzt; die geographische Breite φ eines Ortes wurde meist im Verhältnis der Stabhöhe zur Mittagschattenlänge am Äquinoktialtag ausgedrückt. So galt z.B. für Alexandria das Verhältnis 3:5 ($\tan \varphi = 0,600$, $\varphi \approx 31^\circ$), für Rhodos 5:7 ($\tan \varphi = 0,714$, $\varphi \approx 35,5^\circ$). Das jeweilige Verhältnis entspricht dem Tangens für die geographische Breite φ . Das führte zur Einteilung der damals

bekannten Erdoberfläche in streifenartige »Klima«-Zonen. Den Klimata ordnete man allgemein bekannte Orte zu. So liegt z.B. Alexandreia im III. Klima und Rhodos im IV. Klima.

Literarisch belegt ist das Aufzeichnen des Verhältnisses des Gnomons zu seinem Mittagsschatten zur Zeit der Sommersonnenwende für Massalia (Marseille) durch den Forschungsreisenden Pytheas. Vielleicht war er der erste Griech, der den Gnomon zur Breitenbestimmung benutzte (Szabó 1992): In Massalia wirft der Gnomon (120 Einheiten) zur Sommerwende einen Mittagsschatten von 41,8 Einheiten; Pytheas hatte aus dem Verhältnis 120:41,8 den Parallelkreis über Massalia ermittelt: Die Zenitdistanz z war $19,25^\circ$, $\varepsilon = 24^\circ$. Daraus $\varphi = z + \varepsilon = 19^\circ 12' + 24^\circ = 43^\circ 12'$ nördliche Breite. Der moderne Wert für Marseille ist $\varphi = 43^\circ 17' 52''$ nördliche Breite.

4 »Schiefer Kreis«

Die Schiefe der Ekliptik ε wurde im Altertum als »Schiefer Kreis« bezeichnet und mit rund 24° angegeben; überliefert sind auch die genaueren Werte $23^\circ 45' 05''$ und $23^\circ 51' 15''$. Heute rechnet man mit $23^\circ 26' 45''$ bzw. mit rund $23^\circ, 5$.

Die Ekliptik (Zodiakus, »Tierkreis«) ist der jährliche Lauf der Sonne in Bezug auf den Sternhimmel. Die Ebene der Ekliptik ist gegen die Ebene des Himmelsäquators unter dem Winkel ε geneigt. Die Schiefe der Ekliptik ε kann wie folgt ermittelt werden (Abb. 5):

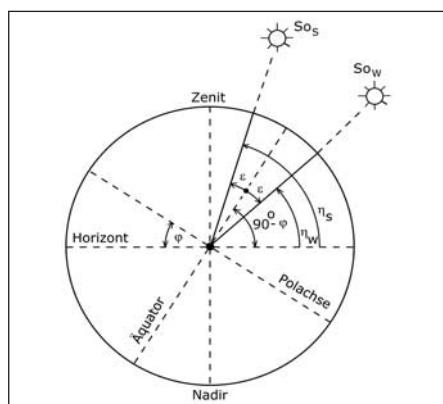


Abb. 5:
Ermittlung der
Schiefe der
Ekliptik

Die Gnomonmessung am Mittag des längsten Tages (So_s , Sommersonnenwende) ergibt die Deklination der Sonne $\delta_s = +\varepsilon$, und am Mittag des kürzesten Tages (So_w , Wintersonnenwende) $\delta_w = -\varepsilon$. Wurden an jenen Tagen für die Sonnenhöhen die Werte η_s und η_w gefunden, so ist $\eta_s = (90^\circ - \varphi) + \varepsilon$ und $\eta_w = (90^\circ - \varphi) - \varepsilon$, daraus folgt $\varepsilon = (\eta_s - \eta_w)/2$, wobei $(90^\circ - \varphi)$ = Äquatorhöhe.

5 Der »Indische Kreis«

Von besonderer Bedeutung für die Feldmessung und die Absteckung von Bauwerken war die Bestimmung der Nord-Süd-Richtung (Mittagslinie). Am einfachsten und

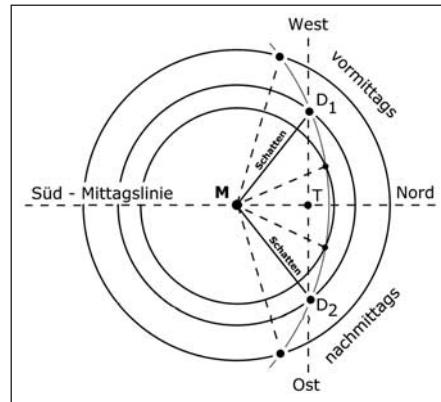


Abb. 6:
Schatten-
messung am
»Indischen
Kreis«

bekanntesten war das Verfahren mit dem »Indischen Kreis«: um den Gnomon (M) zog man mit der Seilschlafte mehrere konzentrische Kreise (Abb. 6), markierte die Punkte, in denen das Ende des Schattens am Vormittag und am Nachmittag durch denselben Kreis hindurchging, die Schatten also dieselbe Länge hatten (z.B. D_1 und D_2).

Dann halbierte man den Bogen zwischen den markierten Punkten. Die Gerade von M zum Halbierungspunkt T ist die gesuchte Mittagslinie (Schmidt 1935, Reprint 1988).

Eine Beschreibung dieses Verfahrens ist bei den Indern aus dem 4. Jahrhundert v. Chr. überliefert, doch ist anzunehmen, dass griechische Gelehrte ebenfalls mit dem Verfahren vertraut waren. Dabei mussten die Höhe des Gnomons und besonders die Länge des Schattens sehr genau bestimmt und gemessen werden; und hier gab es besondere Schwierigkeiten, weil das Ende des Schattens im allmählichen Übergang vom Kernschatten zum Halbschatten (Penumbra) verschwimmt. Insbesondere erweisen sich die Halbschatten bei tiefem Sonnenstand, morgens und abends, als sehr störend. Das verschwommene Stück des Schattens ist umso länger, je höher der Stab ist und je tiefer die Sonne steht (Abb. 7). Wenn man das dem Sonnenmittelpunkt entsprechende Schattenende genau bestimmen wollte, half man sich so, dass man eine kleine Kugel auf die Spitze des Schattenstabes setzte, oder indem man am oberen Ende des Gnomons in einer kleinen Scheibe eine kreisrunde Öffnung anbrachte (Schmidt 1935, Reprint 1988, S. 283).

Die viel komplizierteren Methoden nach dem Gromatiker Hyginus und dem ostarabischen Gelehrten Al-Biruni scheinen sich in der Praxis nicht durchgesetzt zu haben.

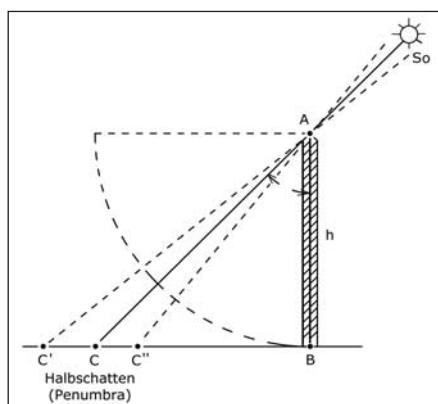


Abb. 7:
Das Problem
des Halb-
schattens

6 Im Alten China

Die Ermittlung des Sonnenschattens spielte schon in den frühen Perioden der chinesischen Geschichte, nachweislich um 300 v.Chr., eine besondere Rolle. Zur Messung der Schatten der Sonne in den verschiedenen Positionen während ihrer Bahn am Himmel diente der Schattenstab, der mit Lot und Wasserwaage errichtet wurde.

Als Standard-Messgerät war er gewöhnlich rund zwei Meter hoch (Abb. 8). Um die Länge des Schattens möglichst scharf zu bestimmen, brachte man – wie schon erwähnt – am oberen Ende des Stabes in einer kleinen Scheibe eine kreisrunde Öffnung von ca. 3 cm an (Minow 1981).



Abb. 8: Schattenmessung im Alten China

Das Prinzip der Messung bei den verschiedenen Sonnenpositionen veranschaulicht Abb. 9. Für einen gegebenen Beobachtungsort (hier in 52° nördlicher Breite) sind die beiden extremen Sonnenstellungen zu den Zeiten der Sommer- und Wintersonnenwenden (Solstitien) dargestellt.

Der Stab mit der Höhe h steht auf einer ebenen Fläche HH' . Z (Zenit) ist der Punkt genau über dem Stab. Der Winkel zwischen H und N (Nordpol der Himmelskugel) entspricht der geographischen Breite φ . Der Winkel zwischen Z und der Äquatorlinie \bar{A} ist gleichfalls φ . Die Sonne, bzw. ihr Schatten, bewegt sich zwischen den Winkelstellungen a_s und a_w , d.h. zwischen den Punkten So_s und So_w . Sie entfernt sich dabei vom Himmelsäquator um jeweils $+\epsilon$ oder $-\epsilon$. Nur zu den Äquinoktien steht die Sonne genau im Himmelsäquator ($\epsilon=0$). Damit lässt sich die geographische Breite berechnen. Die chinesischen Ge-

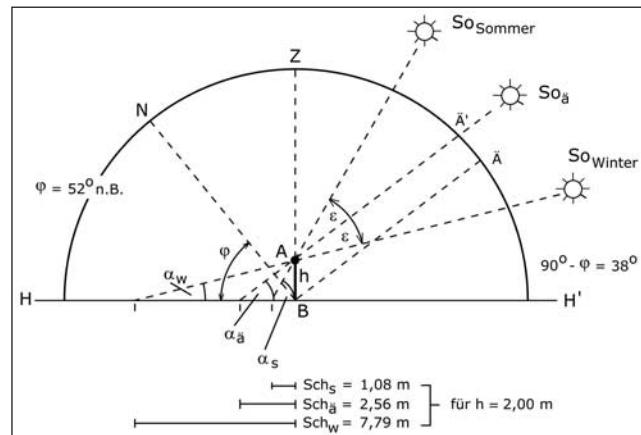


Abb. 9: Beispiel einer Schattenmessung in 52° nördlicher Breite zu verschiedenen Zeiten. Schattenlängen für Gnomon $h = 2 \text{ m}$

lehrten berichten von einer Merkwürdigkeit. An einem Beobachtungsort in einer bestimmten geographischen Breite betrug bei der Tagundnachtgleiche der Schatten (Sch) 6 Einheiten, die Höhe des Schattenstabes (h) 8 Einheiten (6:8:10), das entsprach einem Verhältnis 3:4:5.

7 Schattenquadrat

Das Prinzip des Gnomons erscheint bei den verschiedenen Formen des im Mittelalter in der Feldmessung gebrauchten Schattenquadrates (Abb. 10). Stellt man sich die Seite CD des Schattenquadrate als Gnomon vor, dann stellt die Seite BC die »umbra recta« (gerader Schatten) und die Quadratseite AB die »umbra versa« (verkehrter Schatten) dar. Die lateinischen Namen sind Übersetzungen von in der arabischen Wissenschaft benutzten Bezeichnungen. Das Streckenverhältnis $CE:CD$ entspricht $\tan \alpha$. Wenn CD (die Gnomonseite) = 1, dann ist $\tan \alpha = CE$, also gleich der Schattenlänge auf der »umbra recta«-Seite (Schmidt 1935, Reprint 1988). Das Streckenverhältnis $DC:CE$ (bzw. $AB:CE$) entspricht $\cot \alpha$. Tatsächlich tritt der Tangens auf als Schatten eines horizontal an einer Wand befestigten Gnomons und der Cotangens als Schatten eines senkrecht in den Boden gesteckten Gnomons (Abb. 11). Wird die Ebene, auf der der Gnomon steht, so geneigt, dass der Stab parallel zur Erdachse

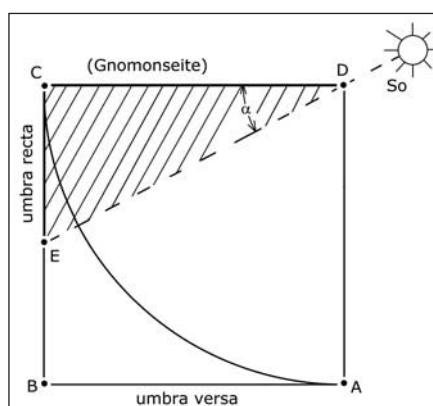


Abb. 10:
Schatten-
quadrat und
Gnomon

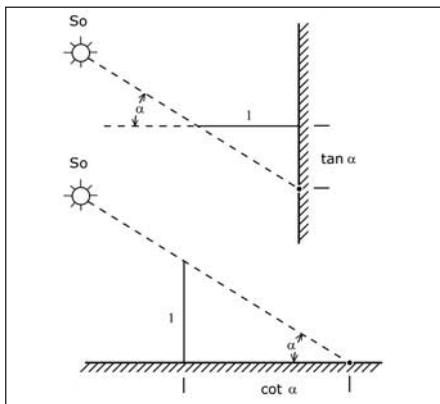


Abb. 11:
Geometrisch-
trigono-
metrische
Beziehungen

steht, seine Ebene also mit dem Horizont den Winkel ($90^\circ - \varphi$) bildet, dann hat man damit das Prinzip der äquatorialen Sonnenuhr. Da der Gnomon in diesem Fall parallel zur Erdachse steht, verhält sich der Sonnenschatten regelmäßig. In gewisser Hinsicht kann der Gnomon als Vorläufer der Sonnenuhr gelten (Bauer 1998).

In einigen antiken Kulturen sind Gnomon-Tabellen (»Schattentafeln«) überliefert. So findet sich in einer babylonischen Tontafel (der MUL.APIN-Serie aus der Zeit um 2300 v. Chr.) eine Gnomon-Tabelle, in der zu verschiedenen Tagen und Tageszeiten die Schattenlängen des Gnomons aufgezeichnet sind.

8 Schluss

Bereits bei den alten Kulturvölkern wurde der Schattenstab als astronomisches Instrument genutzt; auch griechische Gelehrte setzten den »Sonnenzeiger« (Gnomon) für astronomische und geometrische Zwecke ein. Mit der Anwendung des Gnomons und seiner »Schattentafeln« wurde die praktische Astronomie schon in der antiken Wissenschaft zu einem Zweig der Geometrie, mit der zudem die sich später entwickelnde Trigonometrie verbunden ist.

Literatur

- Bauer, O.: Geschichtliche Entwicklung der Sonnenuhren in verschiedenen Kulturen. In: Verm.-Ing. 1998, S. 356–358.
- Buchner, E.: Solarium Augusti und Ara Pacis. In: Mitt. d. Deutschen Archäologischen Instituts, Römische Abt., Bd. 83/1976, S. 319–365.
- Hultsch, F.: Gnomon. In: Realencyclopaedie der class. Altertumswissenschaften (RE), 14, Halbband (1912), VII 2, Sp. 1500–1501.
- Minow, H.: Vermessung im Alten China. In: Verm.-Ing. 1981, S. 50–62.
- Schmidt, F.: Die Geschichte der geodätischen Instrumente und Verfahren im Altertum und Mittelalter. Kaiserslautern 1935, Reprint Stuttgart 1988.
- Szabó, A.: Das geozentrische Weltbild. Astronomie, Geographie und Mathematik der Griechen. München 1992.

Anschrift des Autors

Dipl.-Ing. Helmut Minow
Kelchstraße 11, 44265 Dortmund