

# Zur numerischen Integration mechanischer Bewegungsgleichungen mittels Liereihen-Entwicklung

Enrico Mai und Dieter Lelgemann

## Zusammenfassung

Aktuelle Problemstellungen innerhalb der Satellitengeodäsie setzen die Berechenbarkeit hochgenauer Satellitenbahnen voraus. Dabei kommen in überwiegendem Maße numerische Integrationsmethoden zum Einsatz.

Die Verwendung eines Liereihen-Ansatzes bietet wesentliche Vorteile im Hinblick auf Effizienz und Genauigkeit der numerischen Integration von Bewegungsproblemen. Ein entsprechendes Verfahren wird in seinen Grundlagen vorgestellt und anhand des Duffing-Oszillators in seiner Leistungsfähigkeit bestätigt.

## Summary

*Current tasks in satellite geodesy require the computability of satellite orbits with high precision. In order to meet these demands prevailing numerical integration methods are in use today.*

*The application of a Lie series approach gives a substantial advantage regarding the efficiency and precision of the numerical integration of equations of motion. A customized method is being introduced in its basics. The capacity of this approach is proved by solving Duffing's equation.*

## 1 Einleitung und Problemstellung

Grundlage der Satellitengeodäsie ist die Berechnung von Satellitenbahnen – das ist die Berechnung der zeitlichen Änderungen des Positionsvektors  $\mathbf{r}(t)$  und des Geschwindigkeitsvektors  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ . Bezeichnet  $[\mathbf{e}_i]_I$  eine zeitunabhängige (inertiale), orthonormierte Basis (die sich nicht gegenüber dem Fixsternhimmel dreht), dann kann man beide Vektoren mittels ihrer kartesischen Komponenten beschreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}_I, \\ \dot{\mathbf{r}}(t) &= \begin{bmatrix} dr_1/dt \\ dr_2/dt \\ dr_3/dt \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}_I = \begin{bmatrix} \dot{r}_1(t) \\ \dot{r}_2(t) \\ \dot{r}_3(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}_I. \end{aligned} \quad (1)$$

Im Hinblick auf eine effiziente numerische Integration, ebenso wie hinsichtlich der traditionellen Beschreibung des Erdgravitationsfeldes mittels Kugelkoordinaten  $(r, \phi, \lambda)$ , mag sich ein Übergang auf eine generalisierte

Variable, verknüpft mit den durch die beiden Vektoren  $\mathbf{r}$  und  $\dot{\mathbf{r}}$  aufgespannten Bahnebene, als sehr zweckmäßig erweisen, wie in Cui und Mareyen (1992) eindrucksvoll dokumentiert. So sind beispielsweise die Hill-Variablen, ebenso wie die kartesischen Komponenten  $x^i$  und  $\dot{x}^i$ , *kanonische Variablen* ( $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ ), verknüpft mit  $\mathbf{r}$  und  $\dot{\mathbf{r}}$  durch einfache Vektorbeziehungen ( $\mathbf{e}_k$  = Richtung des aufsteigenden Bahnknotens), siehe Tab. 1.

Zur Aufstellung entsprechender Bewegungsgleichungen hat man die Komponenten des auf den Satelliten einwirkenden Kraft- bzw. Beschleunigungsvektors  $\mathbf{f}$  bezüglich der *Gauß'schen Basis* zu bilden, wobei

$$[\mathbf{e}_i]_G = \begin{bmatrix} {}^3R(u) \\ {}^1R(i) \\ {}^3R(\Omega) \end{bmatrix} [\mathbf{e}_i]_I \quad (2)$$

mit dem Argument  $i$  als Inkination der Bahnebene und

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1G} &= \mathbf{e}_r \text{ Richtung des Satellitenpositionsvektors,} \\ \mathbf{e}_{2G} &= \text{Richtung in Bahnebene senkrecht zu } \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{e}_{3G} &= \text{Richtung senkrecht zur Bahnebene.} \end{aligned} \quad (3)$$

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen  $d\mathbf{r}/dt = \dot{\mathbf{r}}$  und  $d\dot{\mathbf{r}}/dt = \mathbf{f}$  lassen sich dann transformieren zu (Cui und Mareyen 1992)

$$\begin{bmatrix} \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} \\ \frac{dG}{dt} \\ \frac{dH}{dt} \\ \frac{dr}{dt} \\ \frac{du}{dt} \\ \frac{d\Omega}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{G^2}{r^3} \\ 0 \\ 0 \\ \dot{r} \\ \frac{G}{r^2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \cos u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r \sin u \cos i}{G \sin i} \\ 0 & 0 & \frac{r \sin u}{G \sin i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

wobei mit  $A(G, r) = -\frac{1}{2}(G/r)^2$  dann  $G^2/r^3 = \partial A/\partial r$ ,  $G/r^2 = -\partial A/\partial G$  und  $\dot{r} = \partial(+\frac{1}{2}\dot{r}^2)/\partial t$  gilt.

Es erweist sich für geodätische Aufgaben als zweckmäßig, den Kraft- bzw. Beschleunigungsvektor in zwei Teile zu zerlegen:

$$\mathbf{f} = [g^i]^T [\mathbf{e}_i]_G + [\tilde{f}_i(t)]^T [\mathbf{e}_i]_G. \quad (5)$$

Tab. 1: Hill-Variablen und kartesische Koordinaten

| Geschwindigkeiten/Impulse                                                               | Generalisierte Koordinaten      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| $\dot{r} = \mathbf{e}_r \cdot \dot{\mathbf{r}}$                                         | Radialgeschwindigkeit $\dot{r}$ |
| $G^2 = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})$ | Bahndrehimpuls $G$              |
| $H = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{e}_{\lambda}$                   | Poldrehimpuls $H$               |

Der erste Term, der Einfluss des Erdgravitationspotentials  $V(r, \phi, \lambda)$ , lässt sich beschreiben durch den Gradientenvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{g} = \text{grad } V &= \begin{bmatrix} \partial V / \partial r^1 \\ \partial V / \partial r^2 \\ \partial V / \partial r^3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}_I \\ &= \begin{bmatrix} \partial V / \partial r \\ (1/r \cos \phi) \partial V / \partial \lambda \\ (1/r) \partial V / \partial \phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}_G. \end{aligned} \quad (6)$$

Führt man die Hamilton-Funktion  $F$  ein in der Form

$$F = -T + V = -\frac{1}{2} \dot{r}^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{G}{r} \right)^2 + V, \quad (7)$$

dann erhält man als Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} d\dot{r}/dt \\ dG/dt \\ dH/dt \\ dr/dt \\ du/dt \\ d\Omega/dt \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial F / \partial \dot{r} \\ \partial F / \partial G \\ \partial F / \partial H \\ \partial F / \partial r \\ \partial F / \partial u \\ \partial F / \partial \Omega \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \cos u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(r/G) \sin u \cos i / \sin i \\ 0 & 0 & (r/G) \sin u / \sin i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Der zweite Term  $\bar{\mathbf{f}}$  umfasst damit die äußeren Kräfte (Anziehung von Sonne, Mond, Planeten) sowie die Oberflächenkräfte, die bei der Bewegung des Satelliten durch ein Medium (Restatmosphäre, Sonnenstrahlung) auftreten, nämlich Luftwiderstand und Sonnenstrahlungsdruck.

Oberflächenkräfte können mittels eines Akzelerometers gemessen werden, womit sie unmittelbar als Zeitreihe vorliegen. Mit ausreichender Genauigkeit sind auch die äußeren Krafteinflüsse (Sonne, Mond) in dieser Form einfach zu berechnen. Ihre Auswirkungen auf die Satellitenbahn können dann durch direkte Integration über die

Zeit ermittelt werden. Kompliziert wird die Integration der Bewegungsgleichungen ausschließlich dadurch, dass die gravitativen Kräfte durch die Erde nur indirekt über den Positionsvektor  $\mathbf{r}(t)$  als Funktion der Zeit bestimbar sind.

Gewöhnlich wählt man zur numerischen Integration der Bewegungsgleichungen verschiedene Standardverfahren als empirische Integratoren; Einschrittverfahren wie Runge-Kutta oder Mehrschritt-Verfahren wie Adams-Basforth bzw. im Programm UTOPIA der University of Texas einen Integrator nach Krog, Shampine und Gordon.

Da hierbei prinzipiell simple Potenzreihen als Grundlage für den Integrator verwendet werden, basieren derartige Lösungen der Differentialgleichungen von Beginn an auf rein empirischen und in ihren Auswirkungen schwierig zu durchschauenden Approximationen. Zudem entstehen Fragen, die in der Praxis nur durch »trial and error« Methoden zu beantworten sind, nämlich nach

- der Ordnung des Integrators, d. h. dem Grad der Potenzreihenentwicklung für den Integrator,
- der Schrittweite für die numerische Integration,
- der Anzahl der Iterationen bei Mehrschrittverfahren,
- den Kriterien zur Wahl geeigneter generalisierter Bahnvariablen,
- der Abschätzung des globalen Integrationsfehlers vor allem bei langen Bahnen.

Insbesondere bleibt die Abschätzung der Größe des globalen Integrationsfehlers bei der Verwendung derartiger approximativ-empirischer Methoden zur Integration der Bewegungsgleichungen des Satelliten unbefriedigend.

Um derartige Fragen einwandfrei beantworten zu können, muss zunächst ein numerisches Integrationsverfahren entwickelt werden, das speziell auf das jeweilige System der zu integrierenden Differentialgleichungen zugeschnitten ist. Ist der Bewegungsablauf mittels einer Hamilton-Funktion  $F$  beschreibbar, dann bieten sich infinitesimale kanonische Transformationen zur schrittweisen Berechnung der Stützpunktvektoren  $\mathbf{r}(t_i)$  und  $\dot{\mathbf{r}}(t_i)$  an (Schneider 1979, S. 407). Wählt man die Hamilton-Funktion  $F(q_i, p_i)$  ( $q_i \dots$  generalisierte Koordinaten,  $p_i \dots$  generalisierte Impulse) als erzeugende Funktion derartiger kanonischer Transformationen, dann lässt sich die Integration über jeden einzelnen Schritt von  $t_i$  nach  $t_{i+1}$  auf eine Lierreihen-Entwicklung zurückführen; das sind spezielle Taylorreihen für den  $2n$ -dimensionalen Phasenraum.

Da eine kanonische Transformation von  $t_i$  nach  $t_{i+1}$  und die inverse Transformation von  $t_{i+1}$  nach  $t_i$  mittels der gleichen funktionalen Darstellung erfolgt, ist die Genauigkeit des einzelnen Integrationsschrittes bzw. sein Fehler unmittelbar bestimbar; eine präzise Abschätzung des globalen Integrationsfehlers auch bei langen Bahnen wird dadurch ermöglicht.

Ebenfalls kann der Zusammenhang zwischen der Schrittweite und dem Grad der Liereihen-Entwicklung, also der Ordnung des Integrators, einwandfrei geklärt werden. Im Zusammenhang mit dieser Frage kann auch geklärt werden, inwieweit spezielle Parametrisierungen der Bahnvariablen (z.B. kartesische Koordinaten, Hill-Variablen) Auswirkungen auf die Genauigkeit der numerischen Integration haben können.

Ferner ist hervorzuheben, dass sich eine derartige Liereihen-Entwicklung unmittelbar auf spezielle Observable (Strecken, Phasenmessungen usw.) ausdehnen lässt, die als Funktion der sechs Bahnvariablen beschrieben werden können. Damit ist die Aufstellung der Beobachtungs-/Normalgleichungen zur Bestimmung der Anfangswerte bzw. der Parameter einer Kraftfeldbeschreibung (z.B. Kugelfunktionskoeffizienten) mittels des gleichen Grundkonzeptes möglich.

Nicht zuletzt ist anzumerken, dass mittels einer derartigen Methode das Design des numerischen Integrators dem jeweils vorliegenden, speziellen Integrationsproblem angepasst wird. Eine Verknüpfung von numerischer Integration im Zeitbereich und analytischer Integration im Spektralbereich zu sehr effizienten Methoden ist jederzeit möglich.

Im Folgenden sollen das generelle Konzept und die Einfachheit der Liereihen-Methodik anhand von einfachen, eindimensionalen mechanischen Problemstellungen (Oszillatorproblemen) erläutert werden.

## 2 Eindimensionale mechanische Probleme und numerische Integration

### 2.1 Generelle Vorgehensweise

Für eine Bewegungsgleichung 2. Ordnung in  $u(t)$  mit der unabhängigen dimensionslosen Variablen  $t$  der Form

$$\ddot{u} = f(u) \quad (9)$$

kann eine Hamilton-Funktion  $F = F(u, \dot{u})$  derart gefunden werden, dass die kanonischen Gleichungen

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} = \dot{u}, \quad \frac{d\dot{u}}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial u} = \ddot{u} = f(u) \quad (10)$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \ddot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} du/dt \\ d\dot{u}/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial F / \partial u \\ \partial F / \partial \dot{u} \end{bmatrix} \quad (11)$$

erfüllt sind. Falls zusätzlich ein  $\dot{u}$ -Term auftaucht, d.h.  $f = f(u, \dot{u})$ , dann wäre vor dem Folgenden eine spezielle Betrachtung nötig. Dieser nicht-triviale Aspekt der Hamiltonisierung wird in einer späteren Arbeit thematisiert.

Mit der Definition der Poisson-Klammern

$$\begin{aligned} f_{k+1} = \{f_k, F\} &:= \frac{\partial f_k}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial f_k}{\partial \dot{u}} \frac{\partial F}{\partial u}, \\ g_{k+1} = \{g_k, F\} &:= \frac{\partial g_k}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial g_k}{\partial \dot{u}} \frac{\partial F}{\partial u}, \end{aligned} \quad (12)$$

wobei  $f_0 := u$  und  $g_0 := \dot{u}$  ist, lässt sich die Lösung von (9) in Form einer Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} u(t) = u(t_0 + \Delta t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} f_k|_{t=t_0}, \\ \dot{u}(t) = \dot{u}(t_0 + \Delta t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} g_k|_{t=t_0} \end{aligned} \quad (13)$$

angeben und für ein gegebenes  $\Delta t := t - t_0$  berechnen.

### 2.2 Kräftefreier ungedämpfter Oszillator

#### 2.2.1 Dimensionslose Variable

Aus der *Duffing-Gleichung*  $\ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon u^3 = 0$  erhält man für  $\omega_0 \equiv 1$  und  $\varepsilon \equiv 0$  die denkbar einfachste Bewegungsgleichung

$$\ddot{u} + u = 0 \quad (14)$$

mit der bekannten allgemeinen Lösung (verifizierbar durch Ableitung der Lösung)

$$u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad (15)$$

wobei  $c_1$  und  $c_2$  Integrationskonstanten sind. Eine partikuläre Lösung erhält man z.B. durch Berücksichtigung von Anfangsbedingungen  $u(t_0) =: u_0$  und  $\dot{u}(t_0) =: \dot{u}_0$ , aus denen  $c_1 = c_1(u(t_0), \dot{u}(t_0))$  und  $c_2 = c_2(u(t_0), \dot{u}(t_0))$  bestimmt werden können.

Aus (15) folgt die Transformation der Integrationskonstanten  $u_0, \dot{u}_0$  (Anfangswerte) in  $c_1, c_2$  und vice versa:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos t_0 & \sin t_0 \\ -\sin t_0 & \cos t_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \\ \longrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos t_0 & -\sin t_0 \\ \sin t_0 & \cos t_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

so dass

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 (\cos t \cos t_0 + \sin t \sin t_0) + \\ &\quad + \dot{u}_0 (\sin t \cos t_0 - \cos t \sin t_0) \end{aligned} \quad (17)$$

und schließlich

$$u(t) = u_0 \cos \Delta t + \dot{u}_0 \sin \Delta t. \quad (18)$$

Die Darstellung (18) kann ebenso aus der Anwendung von (9) bis (13) gewonnen werden.

Zunächst ist die (14) entsprechende Hamilton-Funktion aufzustellen. Mit (10) und  $f(u) = -u$  erhält man

$$F = \frac{u^2}{2} + \frac{\dot{u}^2}{2} = \frac{1}{2} (u^2 + \dot{u}^2). \quad (19)$$

Einsetzen in (12) liefert

$$\begin{aligned} & (f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, \dots)^T \\ &= (+u, +\dot{u}, -u, -\dot{u}, +u, \dots)^T, \\ & (g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, \dots)^T \\ &= (+\dot{u}, -u, -\dot{u}, +u, +\dot{u}, \dots)^T. \end{aligned} \quad (20)$$

Es ist ersichtlich, dass  $g_k = f_{k+1}$  gilt. Unter Berücksichtigung von (13) erhält man die unendlichen Reihen

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Delta t^{2k}}{(2k)!} + \dot{u}_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Delta t^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \dot{u}(t) &= \dot{u}_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Delta t^{2k}}{(2k)!} - u_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Delta t^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned} \quad (21)$$

Die Summen in (21) entsprechen den bekannten Reihenentwicklungen für  $\cos \Delta t$  bzw.  $\sin \Delta t$ , so dass folgt

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 \cos \Delta t + \dot{u}_0 \sin \Delta t, \\ \dot{u}(t) &= -u_0 \sin \Delta t + \dot{u}_0 \cos \Delta t. \end{aligned} \quad (22)$$

Die Lösungen  $u(t)$  und  $\dot{u}(t)$  aus (22) sind konsistent, d. h.  $\dot{u} = du/dt$ ; sie bestätigen zudem die Lösung aus (18).

## 2.2.2 Modifikationen im Falle dimensionsbehafteter Variablen

Wenn die unabhängige Variable  $t$  mit der Zeit identifiziert werden soll, haftet ihr z. B. die Dimension  $s$  an. Da in diesem Falle die Gleichungen (9) und beispielhaft (14) hinsichtlich der Dimensionen bzw. physikalischen Einheiten nicht mehr konsistent sind, müssen im allgemeinen Vorfaktoren für die einzelnen Summanden in die Bewegungsgleichung eingeführt werden, die dann den verwendeten Einheiten Rechnung tragen.

Für (14) würde man etwa eine Größe  $\omega_0$  mit der Dimension  $1/s$ , also der Dimension einer Frequenz, derart einführen, dass

$$\ddot{u} + ku = \ddot{u} + \omega_0^2 u = 0. \quad (23)$$

Die Gleichung (23) kann wieder geschlossen gelöst werden. Man erhält als allgemeine Lösung

$$u(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t, \quad (24)$$

was sich durch Ableiten und Einsetzen in die ursprüngliche Bewegungsgleichung (23) verifizieren lässt.

Die Zurückführung auf Anfangsbedingungen  $u_0$  und  $\dot{u}_0$  erfolgt analog zu (16):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t_0 & \sin \omega_0 t_0 \\ -\omega_0 \sin \omega_0 t_0 & \omega_0 \cos \omega_0 t_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t_0 & -\frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t_0 \\ \sin \omega_0 t_0 & \frac{1}{\omega_0} \cos \omega_0 t_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (25)$$

Man erhält

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 (\cos \omega_0 t \cos \omega_0 t_0 + \sin \omega_0 t \sin \omega_0 t_0) + \\ &+ \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} (\sin \omega_0 t \cos \omega_0 t_0 - \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t_0) \end{aligned} \quad (26)$$

und schließlich

$$u(t) = u_0 \cos \omega_0 \Delta t + \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 \Delta t. \quad (27)$$

Nachfolgend wird gezeigt, wie man die Lösung zu (23) alternativ durch Anwendung von (9) bis (13) gewinnt.

Mit  $f(u) = -\omega_0^2 u$  ergibt sich die Hamilton-Funktion zu

$$F = \omega_0^2 \frac{u^2}{2} + \frac{\dot{u}^2}{2} = \frac{1}{2} (\omega_0^2 u^2 + \dot{u}^2). \quad (28)$$

Einsetzen in (12) liefert

$$\begin{aligned} & (f_0, f_1, f_2, \dots)^T \\ &= (u, \dot{u}, -\omega_0^2 u, -\omega_0^2 \dot{u}, \omega_0^4 u, \omega_0^4 \dot{u}, \dots)^T, \\ & (g_0, g_1, g_2, \dots)^T \\ &= (\dot{u}, -\omega_0^2 u, -\omega_0^2 \dot{u}, \omega_0^4 u, \omega_0^4 \dot{u}, -\omega_0^6 u, \dots)^T. \end{aligned} \quad (29)$$

Wie schon aus (20), so ist auch aus (29) ersichtlich, dass  $g_k = f_{k+1}$  gilt.

Unter Berücksichtigung von (13) und analog (21) folgt

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega_0 \Delta t)^{2k}}{(2k)!} \\ &+ \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega_0 \Delta t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned} \quad (30)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \dot{u}_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega_0 \Delta t)^{2k}}{(2k)!} \\ &- \omega_0 u_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega_0 \Delta t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned} \quad (31)$$

und somit wieder unter Ersetzung der Summen durch  $\sin$ - bzw.  $\cos$ -Ausdrücke:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 \cos \omega_0 \Delta t + \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 \Delta t, \\ \dot{u}(t) &= -\omega_0 u_0 \sin \omega_0 \Delta t + \dot{u}_0 \cos \omega_0 \Delta t. \end{aligned} \quad (32)$$

Die Lösungen  $u(t)$  und  $\dot{u}(t)$  aus (32) sind wiederum (auch hinsichtlich der Dimensionen bzw. physikalischen Einheiten) konsistent, d.h.  $\dot{u} = du/dt$ , und bestätigen damit die Lösung (27).

Nachfolgend soll gezeigt werden, dass das alternative Verfahren, es entspricht einer *numerischen Integration basierend auf Liereihen*, verwendet werden kann, um Lösungen für Bewegungsprobleme zu berechnen, für die keine geschlossenen bzw. exakten Darstellungen existieren. Natürlich ist das alternative Verfahren nur für diesen Fall gedacht – die Anwendung auf das Beispiel diente der Validierung.

### 2.3 Ungedämpfter Oszillator unter Einfluss von Zentralkräften

Für die Duffing-Gleichung<sup>1</sup>

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (33)$$

ist bisher keine geschlossene bzw. exakte Lösung bekannt. Es liegt jedoch eine neu entwickelte analytische Lösung 10. Ordnung vor (Schneider et al. 2007), die hier zur Kontrolle der numerischen Integration dienen kann.

Zunächst ist die Hamilton-Funktion für die Bewegungsgleichung (33) aufzustellen. Man erhält

$$F = \omega_0^2 \frac{u^2}{2} + \frac{\dot{u}^2}{2} + \varepsilon \frac{u^4}{4} = \frac{1}{2} \left( \omega_0^2 u^2 + \frac{1}{2} \varepsilon u^4 + \dot{u}^2 \right), \quad (34)$$

so dass gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \omega_0^2 u + \varepsilon u^3, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} = \dot{u}. \quad (35)$$

Die einzelnen  $f_k$  ergeben sich damit beispielhaft zu

$$\begin{aligned} f_0 &= +u, \\ f_1 &= +\dot{u}, \\ f_2 &= -\omega_0^2 u - \varepsilon u^2 u, \\ f_3 &= -\omega_0^2 \dot{u} - 3\varepsilon u^2 \dot{u}, \\ f_4 &= +\omega_0^4 u + 3\varepsilon^2 u^4 u - 6\varepsilon \dot{u}^2 u + 4\varepsilon \omega_0^2 u^2 u, \\ f_5 &= +\omega_0^4 \dot{u} + 27\varepsilon^2 u^4 \dot{u} - 6\varepsilon \dot{u}^2 \dot{u} + 24\varepsilon \omega_0^2 u^2 \dot{u}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (36)$$

Nunmehr soll der Ablauf der numerischen Integration an einem Beispiel gezeigt werden.

#### 2.3.1 Numerische Integration und Genauigkeit

Nach Einsetzen nominaler Werte für die Parameter  $\omega_0$  bzw.  $\varepsilon$  und Auswertung der  $f_k$  mittels gegebener bzw. gewählter Anfangswerte kann die Summenbildung nach (13) erfolgen. Dazu ist lediglich noch eine Schrittweite  $\Delta t$  zu wählen. Wie bei der gewöhnlichen numerischen Integration, so ist auch hier die optimale Kombination von Schrittweite und Entwicklungsgrad der Reihenentwicklung in der Regel nicht von vornherein theoretisch exakt angebar. Vielmehr ist eine gute Kombination oft nur nach ausgiebigen numerischen Tests und in Verbindung mit problemspezifischen Überlegungen zu finden.

Für alle Testrechnungen gelten die nominalen Werte  $\omega_0 = 1$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{100}$  für die Parameter und die Startwerte

$$t_0 = 0, \quad u_0 = 1, \quad \dot{u}_0 = 0. \quad (37)$$

Gesucht sei der Funktionswert  $u(t_e = 10)$  mit höchstmöglicher Genauigkeit. Die Kontrolle ist mit der erwähnten analytischen Lösung 10. Ordnung gegeben, wobei »Ordnung« auf den Kleinheitsparameter  $\varepsilon = \frac{1}{100}$  Bezug nimmt. Der Fehler der analytischen Lösung liegt für das gewählte Beispiel daher im Bereich von  $(1/100)^{11} = 10^{-22}$ .

Da  $\omega_0 = 1$  gewählt wurde, wäre eine komplette Schwingung nach  $t = 2\pi$  beendet. Abb. 1 zeigt den Verlauf bis  $t_e = 10$  also ca. 1.6 Schwingungen. Die gesuchte (bzw. Soll- oder Vergleichs-) Lösung lautet demnach (AL ... Analytische Lösung)

$$u_{AL}(t_e = 10) = -0.81779675090904600030055. \quad (38)$$

Dieser Wert soll nun möglichst genau mittels der numerischen Integration reproduziert werden. Zunächst ist eine Schrittweite  $\Delta t$  zu wählen. Es ist nicht zu erwarten, dass hier ein einziger Schritt genügt, d.h.  $\Delta t = t_e - t_0$  wählbar ist. Vielmehr stellt eine Viertelschwingung eine obere Grenze für praktikable Schrittweiten dar, hier also  $\Delta t = 2\pi/4 = \pi/2 \approx 1.57$ . Wir testen hier zunächst mit  $\Delta t = 1$ .

Als nächstes muss für die praktische Rechnung ein  $k_{max}$ , d.h. ein maximaler Entwicklungsgrad für die Liereihen-Entwicklung, festgelegt werden. Wir wählen z.B.  $k_{max} = 10$ , so dass etwa für  $f_{10}$  die zehnfach geschachtelte Poisson-Klammer

$$f_{10} = \{ \{ \{ \{ \{ \{ \{ \{ \{ \{ f_0, F \}, F \} \quad (39)$$

<sup>1</sup> Anmerkung zur Dimension von  $\varepsilon$ : Falls die unabhängige Variable  $t$  wieder als Zeit identifiziert wird und somit etwa die Dimension s trägt, besitzt  $\varepsilon$  die Dimension  $1/s^2$ . Wenn zusätzlich die abhängige Variable  $u$  mit einer Auslenkung identifiziert wird und somit etwa die Dimension m trägt, besitzt  $\varepsilon$  die Dimension  $1/m^2 s^2$ . Sofern die Variablen  $t$  und  $u$  dimensionslos sind, ist auch der Parameter  $\varepsilon$  dimensionslos. Gleicher gilt für  $\omega_0$ .

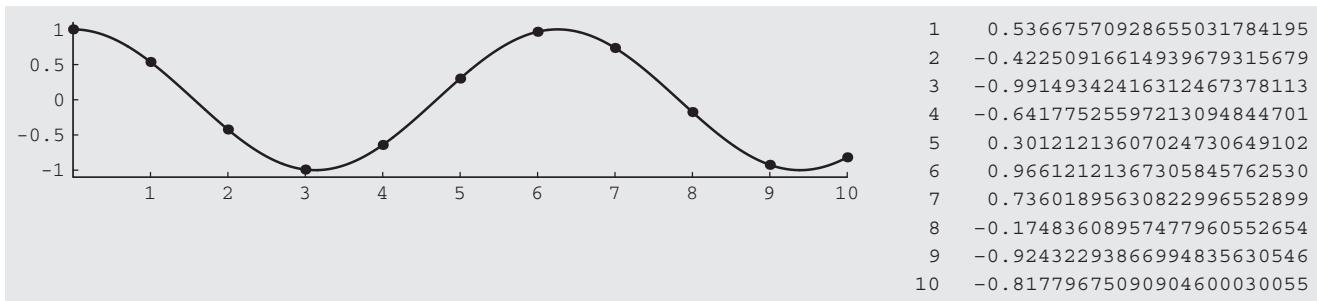


Abb. 1: Zeitreihe  $u(t)$  unter Hervorhebung ausgewählter Epochen  $t_i$  (zugehörige Zahlenwerte  $u(t_i)$  angegeben mit 23 signifikanten Stellen)

aufgestellt und ausgewertet werden muss, was z. B. mittels *MATHEMATICA*™ höchst einfach erfolgen kann. Nach (13) und mit  $g_k = f_{k+1}$  berechnet man die Lösung mittels

$$u(t) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \frac{\Delta t^k}{k!} f_k|_{u_0, \dot{u}_0}, \quad (40)$$

$$\dot{u}(t) = \sum_{k=1}^{k_{\max}+1} \frac{\Delta t^{k-1}}{(k-1)!} f_k|_{u_0, \dot{u}_0}.$$

Für die Berechnung von  $\dot{u}(t)$  muss also zusätzlich ein  $f_{k_{\max}+1}$  bestimmt werden. Man erhält dann nach einem Integrationsschritt, also zur Epoche  $t = 1 \cdot \Delta t = 1 \cdot 1 = 1$ , die Werte (NI ... Numerische Integration)

$$u_{NI}^{k_{\max}=10}(t=1) = +0.536675707897\dots, \quad (41)$$

$$\dot{u}_{NI}^{k_{\max}=10}(t=1) = -0.846505911\dots.$$

Der Wert  $u_{NI}(t=1)$  stimmt mit dem Wert  $u_{AL}(t=1)$  also nur in den ersten 6 signifikanten Stellen überein.

Um zu sehen, ob dieser Fehler der Ordnung  $O(10^{-7})$  tatsächlich die Genauigkeit der NI mit der bisher gewählten Kombination Schrittweite/Entwicklungsgrad repräsentiert, gibt es eine sehr einfache Möglichkeit: man rechnet mit den gleichen Formeln vom erreichten Zustand rückwärts, wobei  $\Delta t \parallel -\Delta t$ ,  $u(t_0) \parallel u(t)$  sowie  $\dot{u}(t_0) \parallel \dot{u}(t)$ , und bestimmt die resultierende Abweichung von den zuvor gültigen Startwerten. Diese Abweichung ist ein Maß für die Genauigkeit des durchgeführten Integrationsschrittes. In unserem Beispiel ergibt sich

$$u_{NI}^{k_{\max}=10}(t=0) = 1 + 0.000004103\dots, \quad (42)$$

$$\dot{u}_{NI}^{k_{\max}=10}(t=0) = -0.000006731\dots.$$

Vergleicht man die Werte (42) mit den Startwerten (37), so wird die Genauigkeit der NI von lediglich etwa  $O(10^{-6})$  und damit das Ergebnis aus obigem Vergleich mit der AL bestätigt. Diese Genauigkeit ist noch nicht befriedigend, so dass vor einem Weiterschreiten Richtung  $t_e$  zunächst die Genauigkeit des Einzelschritts erhöht werden muss.

### 2.3.2 Methoden zur Erhöhung der Integrationsgenauigkeit

Eine Erhöhung der Integrationsgenauigkeit kann erfolgen durch Wahl eines erhöhten Entwicklungsgrades  $k_{\max}$  der Reihe und/oder Verringerung der Schrittweite  $\Delta t$ . In unserem Beispiel könnte man also zunächst die Wahl eines höheren Entwicklungsgrades für die Reihenentwicklung versuchen. Mit  $k_{\max} = 15$  folgt etwa

$$u_{NI}^{k_{\max}=15}(t=1) = +0.536675707897\dots, \quad (43)$$

$$\dot{u}_{NI}^{k_{\max}=15}(t=1) = -0.846501270259\dots$$

und nach der Rückrechnung

$$u_{NI}^{k_{\max}=15}(t=0) = +0.999999998575\dots, \quad (44)$$

$$\dot{u}_{NI}^{k_{\max}=15}(t=0) = -0.000000003266\dots.$$

Sowohl der Vergleich Vorwärts-Rückwärts-Rechnung, als auch der Vergleich AL vs. NI deuten nunmehr auf eine Genauigkeit für den Einzelschritt von  $O(10^{-9})$  hin. Der Aufwand, drei zusätzliche signifikante Stellen gewonnen zu haben, wurde mit einem unverhältnismäßig scheinenden höheren Aufwand an Poisson-Klammer-Bildungen erkauft. Statt  $k_{\max}$  zu erhöhen, sollte eher an einer Verringerung der Schrittweite gedacht werden.

Zu diesem Zweck wurde das Beispiel erneut durchgerechnet (mit jeweils  $k_{\max} = 10$ ) und als Ausgangsschrittweite  $\Delta t = \pi/4$  gewählt. Um nachfolgend die Genauigkeit zu steigern, ist die Schrittweite sukzessive halbiert worden; bis zum Erreichen eines maximalen (Einzelschritt-)Fehlers von der Ordnung  $O(\varepsilon^{10}) = 10^{-22}$ .

Tab. 2 zeigt, dass in diesem konkreten Beispiel nach 5 Schrittweitenhalbierungen (was letztlich einem 1/256 der Periodendauer entspricht) eine Genauigkeit von mindestens 23 signifikanten Stellen für den Einzelschritt der NI erreicht worden ist.

Schließlich bleibt die ursprüngliche Aufgabe zu lösen, d. h. der Zahlenwert für  $u(t_e = 10)$  mit hoher Genauigkeit zu bestimmen. Da  $t = 10$  kein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi/128 = 0.0245437\dots$  ist, wird die Schrittweite im Folgenden auf  $\Delta t = 0.025 = 1/40$  festgelegt, so dass 400 aufeinanderfolgende Einzelschritte für die NI von  $t_0 = 0$  bis  $t_e = 10$  notwendig werden.

Tab. 2: Genauigkeit eines Einzelschrittes der nummerischen Integration

| Schrittweite<br>$\Delta t$ | Hin-Rechnung                                           |                                    | Rück-Rechnung                   |                                  |
|----------------------------|--------------------------------------------------------|------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
|                            | $u_{NI}(t=1 \cdot \Delta t)$                           | $\dot{u}_{NI}(t=1 \cdot \Delta t)$ | $u_{NI}(t=0)$                   | $\dot{u}_{NI}(t=0)$              |
| $\frac{\pi}{4}$            | 0.70458557403710969762734<br>0.70458559603048336571242 | -0.71226915278311457095023         | 1.00000029921114401404192<br>1  | -0.00000045251210003579419<br>0  |
| $\frac{\pi}{8}$            | 0.92314713317227767942307<br>0.92314713317779770341787 | -0.38622291629466186733677         | 1.00000000010693873672807<br>1  | -0.00000000009285233011729<br>0  |
| $\frac{\pi}{16}$           | 0.98059499032604903971845<br>0.98059499032605039687758 | -0.19700358864960047177275         | 1.000000000000002891131676<br>1 | -0.000000000000001289493648<br>0 |
| $\frac{\pi}{32}$           | 0.99513669091644179450577<br>0.99513669091644179483770 | -0.09899255183097833099550         | 1.000000000000000724355<br>1    | -0.000000000000000162564<br>0    |
| $\frac{\pi}{64}$           | 0.99878341809258121086974<br>0.99878341809258121086982 | -0.04955775434080910377594         | 1.0000000000000000178<br>1      | -0.0000000000000000020<br>0      |
| $\frac{\pi}{128}$          | 0.99969580734122423945251<br>0.99969580734122423945251 | -0.02478656616236079357912         | 1.0000000000000000000<br>1      | -0.0000000000000000000<br>0      |

Tab. 3: Genauigkeit des Endergebnisses der nummerischen Integration

| Einzelschritt $n$ | $t = n \cdot \Delta t$ | $u_{NI}(t)$ für $k_{\max} = 10$ | $u_{AL}(t)$ (Lsg. 10. Ordnung) | $ \Delta u_{NI-AL}(t) $ |
|-------------------|------------------------|---------------------------------|--------------------------------|-------------------------|
| 1                 | 0.025                  | 0.99968439193154056407663       | 0.99968439193154056407663      | $< 1 \cdot 10^{-23}$    |
| 2                 | 0.050                  | 0.99873777088422340058848       | 0.99873777088422340058848      | $< 1 \cdot 10^{-23}$    |
| 3                 | 0.075                  | 0.99716074617907854866116       | 0.99716074617907854866117      | $1 \cdot 10^{-23}$      |
| :                 | :                      |                                 |                                |                         |
| 39                | 0.975                  | 0.55766783193137868294702       | 0.55766783193137868294719      | $17 \cdot 10^{-23}$     |
| 40                | 1.000                  | 0.53667570928655031784178       | 0.53667570928655031784195      | $17 \cdot 10^{-23}$     |
| 41                | 1.025                  | 0.51534721515761530863632       | 0.51534721515761530863649      | $17 \cdot 10^{-23}$     |
| :                 | :                      |                                 |                                |                         |
| 199               | 4.975                  | 0.27721657819626434994583       | 0.27721657819626434994591      | $8 \cdot 10^{-23}$      |
| 200               | 5.000                  | 0.30121213607024730649093       | 0.30121213607024730649102      | $9 \cdot 10^{-23}$      |
| 201               | 5.025                  | 0.32501927485819028209498       | 0.32501927485819028209507      | $9 \cdot 10^{-23}$      |
| :                 | :                      |                                 |                                |                         |
| 359               | 8.975                  | -0.91444825329524494142037      | -0.91444825329524494142043     | $6 \cdot 10^{-23}$      |
| 360               | 9.000                  | -0.92432293866994835630540      | -0.92432293866994835630546     | $6 \cdot 10^{-23}$      |
| 361               | 9.025                  | -0.93361501733753773955593      | -0.93361501733753773955598     | $5 \cdot 10^{-23}$      |
| :                 | :                      |                                 |                                |                         |
| 398               | 9.950                  | -0.84565076125189914313821      | -0.84565076125189914313833     | $12 \cdot 10^{-23}$     |
| 399               | 9.975                  | -0.83198553758367316247141      | -0.83198553758367316247154     | $13 \cdot 10^{-23}$     |
| 400               | 10.000                 | -0.81779675090904600030041      | -0.81779675090904600030055     | $14 \cdot 10^{-23}$     |

Tab. 3 zeigt, dass die Genauigkeit des durch aufeinanderfolgende Einzelschritte erzielten Endergebnisses (zumindest in diesem Beispiel) in der gleichen Größenordnung liegt, wie die der Einzelschritte selbst. Die Bewegungsgleichung des Duffing-Oszillators wurde also mit einem Fehler der Ordnung  $O(\varepsilon^{-22})$  *numerisch* integriert.

Nun soll anhand dieses Beispiels getestet werden, bis zu welcher Genauigkeit die NI noch mit der AL ohne einen unakzeptabel hohen Rechen- bzw. Zeitaufwand mithal-

ten kann. Es stellte sich heraus, dass eine Kombination von  $k_{\max} = 12$  und  $\Delta t = 0.004 = 1/250$  zum genauesten Ergebnis führt, bei noch vertretbarem Aufwand. Höhere Entwicklungsgrade sind zwar noch möglich (bis  $k_{\max} = 15$ ), jedoch erhöht sich die benötigte Rechenzeit dann schon beträchtlich. Wie bereits angedeutet, würde hier eine Verringerung der Schrittweite vergleichsweise mehr einbringen. Mit der genannten Kombination erhält man für den ersten Einzelschritt das Ergebnis

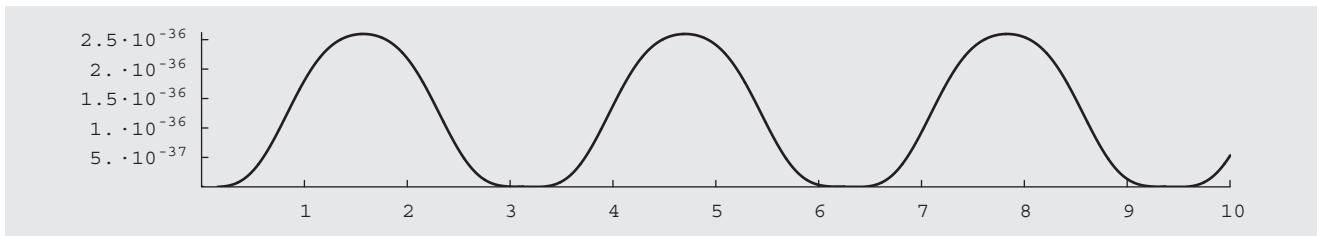


Abb. 2: Zeitreihe für  $\Delta F$ , berechnet aus den durch numerische Integration erzielten Einzelwerten  $u$  und  $\dot{u}$  für die 2501 Epochen von  $t_0 = 0$  bis  $t_e = 10$  ( $\Delta t = 1/250$ )

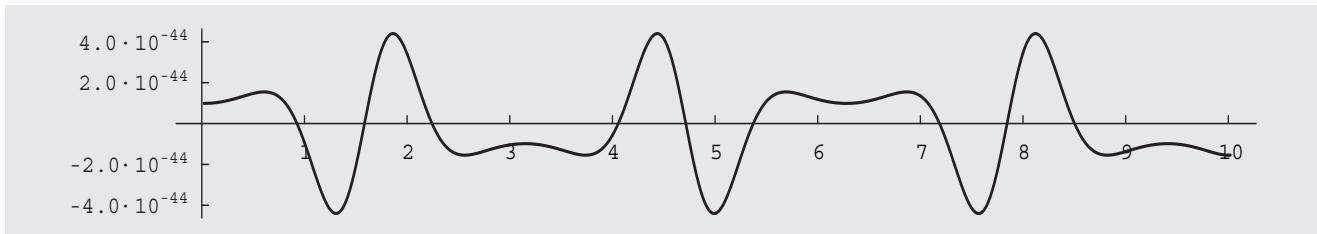


Abb. 3: Zeitreihe der Residuen für die Bewegungsgleichung

$$\text{Hin: } u_{NI}^{k_{\max}=12}(t = 0.004) =$$

$$+0.999\,991\,920\,011\,096\,526\,193\,060\,434\,376\,201\,066\,868\,172\,705 \dots ,$$

$$\text{Hin: } \dot{u}_{NI}^{k_{\max}=12}(t = 0.004) =$$

$$-0.004\,039\,988\,903\,477\,377\,073\,442\,361\,747\,996\,021\,009\,982\,801 \dots ,$$

$$\text{Rück: } u_{NI}^{k_{\max}=12}(t = 0) =$$

$$+0.999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,823\,513 \dots ,$$

$$\text{Rück: } \dot{u}_{NI}^{k_{\max}=12}(t = 0) =$$

$$+0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,002\,110 \dots .$$

(45)

Für den ersten Einzelschritt beträgt der Fehler also etwa  $10^{-40}$ . Bei der NI über das gesamte Intervall hinweg (bis  $t_e = 10$ ) könnte sich dieser Fehler akkumulieren. Eine Möglichkeit, fortlaufend die Genauigkeit der Lösung zu testen, besteht in der Überprüfung der Konstanz der Hamilton-Funktion  $F$ .

Aus Abb. 2 erkennt man<sup>2</sup>, dass der nominale Wert für die Hamilton-Funktion zumindest im betrachteten Intervall im Bereich von  $10^{-36}$  konstant bleibt. Der gesuchte Endwert beträgt

$$u_{NI}^{k_{\max}=12}(t_e = 10) =$$

$$-0.817\,796\,750\,909\,046\,000\,300\,541\,417\,100\,747\,022\,534\,436\,887 \dots .$$

(46)

Eine unabhängige Kontrolle soll nun wiederum mittels der AL erfolgen. Zu diesem Zweck muss diese zunächst um einige Ordnungen erweitert werden. Um die

<sup>2</sup> mit  $F = F_0 + \Delta F$ , wobei  $F_0 = F(t_0) = \frac{1}{2} (\omega_0^2 u_0^2 + \frac{1}{2} \varepsilon u_0^4 + \dot{u}_0^2) = \frac{1}{2} (1^2 \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} \cdot 1^4 + 0^2) = \frac{201}{400} = 0.5025$

Einzelschrittgenauigkeit der NI zu erreichen, müsste für  $\varepsilon = 1/100$  also eine Erweiterung bis zur 20. Ordnung erfolgen. Dieses ist nach der ursprünglichen Methode (Schneider et al. 2007) problemlos möglich und wurde auch entsprechend umgesetzt. Mit der AL 20. Ordnung erhält man

$$\begin{aligned} u_{AL}(t = 0.004) &= \\ &+0.999\,991\,920\,011\,096\,526\,193\,060\,434\,376\,201\,066\,868\,165\,917 \dots , \\ u_{AL}(t_e = 10) &= \\ &-0.817\,796\,750\,909\,046\,000\,300\,541\,417\,100\,747\,021\,162\,665\,860 \dots . \end{aligned} \quad (47)$$

Vergleicht man diese Werte mit denen der NI, so werden die Aussagen zum lokalen und globalen Fehlerverhalten der NI voll bestätigt: Die Überprüfung der Konstanz der Hamilton-Funktion liefert für die NI unmittelbar die Größenordnung des globalen Integrationsfehlers. Der lokale Fehler einer NI mittels Liereihen kann hingegen aus einem Vergleich von kurzzeitiger Vorwärts-Rückwärtsrechnung unmittelbar gewonnen werden.

Die AL lässt sich ebenfalls kontrollieren: man kann z. B. die in der Bewegungsgleichung auftauchenden Ableitungen formal bilden und die jeweils benötigten nominalen Werte (hier  $\ddot{u}(t_i)$  und  $u(t_i)$ ) für beliebige Epochen  $t_i$  unmittelbar berechnen. Mit diesen kann dann die notwendige Bedingung nachgeprüft werden; nämlich ob nach Einsetzen die Bewegungsgleichung mit der gewünschten Genauigkeit erfüllt ist, siehe Abb. 3.

Fazit: Die analytische Lösung für den Duffing-Oszillatator kann problemlos bis zur 20. Ordnung aufgestellt werden (bedeutet für das obige Beispiel einen Fehler der Größenordnung  $(1/100)^{21} = 10^{-42}$ ); wahrscheinlich noch darüber hinaus. Die numerische Integration des Duffing-Oszillators ist ebenfalls mit hoher Genauigkeit möglich. Anforderungen an akzeptable Rechenzeiten

begrenzten die erreichbare Genauigkeit in unserem Beispiel auf  $O(10^{-36})$ . Die globale Genauigkeit lag hier um etwa 4 Größenordnungen niedriger, als die lokale Genauigkeit. Diesen Genauigkeitsverlust, der insbesondere bei kleinen Schrittweiten in Verbindung mit vielen Einzelschritten zu erwarten ist, gilt es stets zu beachten – erst recht bei gewöhnlichen numerischen Integrationsverfahren.

Für das hier betrachtete vergleichsweise einfache mechanische Schwingungsproblem ist die AL der NI noch überlegen, zumal die Untersuchung des Lösungsverhaltens im vorteilhaften Spektralbereich erfolgen kann. Für kompliziertere Bewegungsprobleme (z. B. Satellitenbahnen) ist zu erwarten, dass die NI mittels Liereihen ebenfalls vergleichsweise hochgenaue Lösungen liefern kann.

Zum Abschluss soll für das obige Beispiel die Einzelschrittgenauigkeit der NI noch auf einem alternativen Weg bestimmt werden; wobei wiederum ausgenutzt wird, dass hier tatsächlich eine AL verfügbar ist.

Um für die Reihenentwicklung einer Funktion  $u(t)$  eine Restgliedabschätzung durchführen zu können, muss diese Funktion explizit bekannt sein. Dies ist z. B. bei Approximationsproblemen der Fall, aber eigentlich nicht in unserem Beispiel, da wir eine Lösung für die Funktion  $u(t)$  ja gerade erst durch NI gewinnen wollen. Um die getroffene Aussage zur Größenordnung des lokalen Fehlers ( $10^{-40}$ ), gewonnen aus dem Vergleich Vorwärts-Rückwärts-Rechnung, trotzdem im Sinne einer Restgliedabschätzung bestätigen zu können, verwenden wir die erwähnte AL für  $u(t)$ .<sup>3</sup>

Im Falle einer gewöhnlichen Taylorreihen-Entwicklung (mit dem Entwicklungspunkt  $t_0$ )

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} u^{(k)}(t_0) \quad (48)$$

kann, falls  $u$  analytisch ist,  $u(t)$  mittels der Taylorformel zerlegt werden in eine Summe aus Taylorpolynom  $P(t)$  vom Grad  $k_{\max}$  und ein zugehöriges Restglied  $R(t)$ :

$$\begin{aligned} u(t) &= P_{k_{\max}}(t) + R_{k_{\max}+1}(t) + \dots = \\ &\sum_{k=0}^{k_{\max}} \frac{(t-t_0)^k}{k!} u^{(k)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^{k_{\max}+1}}{(k_{\max}+1)!} u^{(k_{\max}+1)}(t_0) + \dots \end{aligned} \quad (49)$$

Wird die Funktion  $u(t)$  durch das Taylorpolynom  $P(t)$  ersetzt bzw. approximiert, dann kann das Restglied  $R(t)$  verwendet werden, um den resultierenden (absoluten) Approximationfehler zu bestimmen. Für die Angabe des relativen Fehlers würde man dann  $|R(t)/u(t)|$  bilden. Es

existiert eine ganze Reihe von expliziten Formeln zur Restgliedabschätzung; die bekanntesten sind die nach Lagrange und Cauchy. Alle diese Formeln verwenden einen Zwischenpunkt  $\xi \in (t_0, t)$ , der zunächst unbestimmt bleibt, so dass die Restglieder nicht exakt berechnet, sondern nur (nach oben) abgeschätzt werden können:

$$|R_{k_{\max}+1}(t)| \leq \max \left| \frac{(t-t_0)^{k_{\max}+1}}{(k_{\max}+1)!} u^{(k_{\max}+1)}(\xi) \right|. \quad (50)$$

Übertragen auf den Liereihen-Ansatz und unser konkretes Beispiel erhielt man für den ersten Integrationsschritt, das Intervall  $(t_0 = 0, t_1 = t_0 + \Delta t = 1/250)$  überbrückend, die folgende Restgliedabschätzung (und damit eine Abschätzung des lokalen Fehlers der NI) im Falle vom verwendeten  $k_{\max} = 12$ :

$$\begin{aligned} |R_{13}(t)| &\leq \max \left| \frac{\Delta t^{13}}{13!} f_{13} \right|_{\xi} \\ &= \max \left| 1.0777 \cdot 10^{-41} \cdot f_{13} \right|_{\xi}. \end{aligned} \quad (51)$$

Für  $f_{13} = f_{13}(u, \dot{u})$  erhält man nach (12)

$$f_{13}(u, \dot{u}) = \sum_{n=1(2)}^7 (-1)^{\frac{n-1}{2}} \dot{u} \sum_{m=0(2)}^{2(7-n)} a_{n,m} u^m, \quad (52)$$

mit den Koeffizienten (unserem Beispiel folgend wurden dabei  $\omega_0 = 1$  und  $\varepsilon = \frac{1}{100}$  eingesetzt):

$$[a_{n,m}] = \begin{bmatrix} a_{1,0} & a_{1,2} & a_{1,4} & a_{1,6} & a_{1,8} & a_{1,10} & a_{1,12} \\ a_{3,0} & a_{3,2} & a_{3,4} & a_{3,6} & a_{3,8} \\ a_{5,0} & a_{5,2} & a_{5,4} \\ a_{7,0} \end{bmatrix} \quad (53)$$

und konkret

$$[a_{n,m}]^T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{24909}{50} & \frac{255987}{2500} & \frac{68607}{125000} \\ \frac{37368}{25} & \frac{713529}{625} & \frac{897561}{31250} \\ \frac{6483609}{10000} & \frac{4940217}{50000} & \frac{13577949}{25000000} \\ \frac{4725639}{125000} & \frac{6399729}{312500} \\ \frac{80071443}{100000000} & \frac{60205761}{5000000000} \\ \frac{9005661}{1250000000} \\ \frac{23444883}{100000000000} \end{bmatrix}. \quad (54)$$

Wie man sieht, taucht der Parameter  $\xi$  bzw.  $t$  nicht explizit in  $f_{13}$  auf; dafür implizit durch die Abhängigkeit von  $u$  bzw.  $\dot{u}$  von  $t$ . Um eine Abschätzung vornehmen zu können, muss also der Wertebereich von  $u(t)$  bzw.  $\dot{u}(t)$  im betrachteten Intervall ( $t_0 = 0, t_1 = 0.004$ ) ermittelt werden. Mit diesen wird dann das Maximum von  $|f_{13}|$  in diesem Intervall bestimmt, siehe Abb. 4.

<sup>3</sup> Dieses Vorgehen ist also nur in Ausnahmefällen möglich. Alternativ könnten für eine Abschätzung jedoch auch die numerisch integrierten Werte  $u$  zusammen mit den daraus durch numerische Differentiation (ansonsten möglichst zu vermeiden) berechenbaren Werten  $\dot{u}$  genügen.

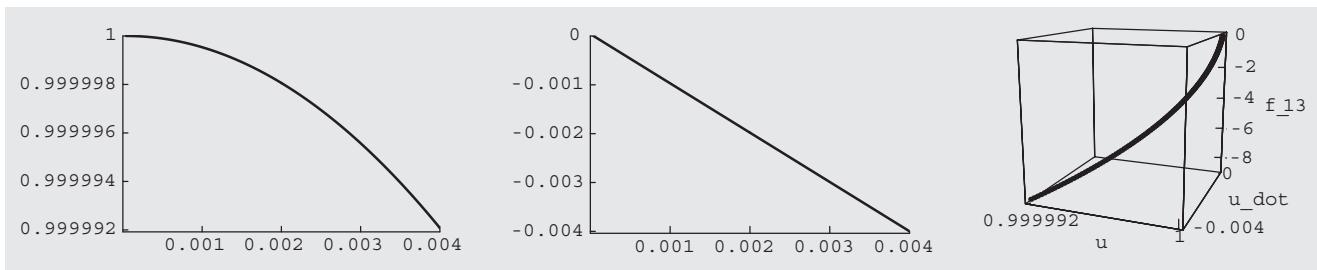


Abb. 4: Zeitreihen für  $u(t)$  (links) bzw.  $\dot{u}(t)$  (Mitte), berechnet mittels der AL 20. Ordnung, und resultierender Verlauf von  $f_{13}$  (rechts)

Für das Intervall ( $t_0 = 0, t_1 = 0.004$ ) erhält man  $\max|f_{13}(u, \dot{u})| = 8.81775$  und nach Einsetzen in (51) damit als obere Abschätzung für das Restglied  $|R_{13}(t)| = O(10^{-40})$ . Diese Abschätzung für den lokalen Fehler des ersten Einzelschrittes bestätigt das frühere Ergebnis aus dem Vergleich Vorwärts-Rückwärts-Rechnung.

### Literatur

- Cui, Ch., Marey, M.: Gauß's equations of motion in terms of Hill variables and first application to numerical integration of satellite orbits. *Manuscripta Geodaetica*, Vol. 17, 155 ff, 1992.  
 Schneider, M.: Himmelsmechanik. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich, 1979.  
 Schneider, M., Cui, Ch., Mai, E.: Zur Entwicklung von Bahntheorien. 2008 (zur Veröffentlichung bei der DGK vorgesehen).

### 3 Schlussbemerkungen

Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen für einen Oszillator unter dem Einfluss einer äußeren Kraft (Resonanzen) sowie eines Oszillators mit Dämpfung (Dissipationsfunktion) erforderte zunächst eine Erweiterung des grundlegenden Gleichungssystems; die Integration eines derart weiterentwickelten Systems von Differentialgleichungen wird derzeit untersucht und numerisch getestet, womit letztendlich alle Möglichkeiten eindimensionaler Bewegungsprobleme abgedeckt wären.

Die Liereihen-Methodik soll ebenfalls zur numerischen Integration von Satellitenbahnen unter Einbeziehung aller Krafteinwirkungen angewandt werden. Entsprechende Software könnte z.B. anhand des Bahnbestimmungsprogramms UTOPIA der University of Texas numerisch getestet werden.

Bei allen bisher untersuchten Beispielen erwies sich jedenfalls die numerische Integration mittels Liereihen, deren Grundkonzept in der vorliegenden Abhandlung an einfachen Beispielen erläutert wurde, als ungemein effizient verglichen mit den derzeit gebräuchlichen numerischen Verfahren. Der Approximationsfehler lässt sich einerseits sehr genau abschätzen; zum anderen kann dieses numerische Integrationsverfahren einem jeweils vorliegenden speziellen Problem jederzeit optimal angepasst werden.

### Anschrift der Autoren

Dr.-Ing. Enrico Mai  
 Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik  
 Technische Universität Berlin  
 Straße des 17. Juni 135  
 10623 Berlin  
 Tel.: +49 (0)30 314-23204, Fax: +49 (0)30 314-21973  
 enrico@mca.bv.tu-berlin.de

Prof.-Dr. Dieter Lelgemann  
 Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik  
 Technische Universität Berlin  
 Straße des 17. Juni 135  
 10623 Berlin  
 Tel.: +49 (0)30 314-27712, Fax: +49 (0)30 314-21973  
 kunkel@mca.bv.tu-berlin.de