

Optimierung der Rechenzeit bei der Berechnung der 2. Ableitungen des Gravitationspotentials von Massenelementen

Franziska Wild-Pfeiffer, Werner Augustin und Bernhard Heck

Zusammenfassung

Die topographischen und isostatischen Reduktionsmethoden sowie moderne Konzepte der Gravitationsfeldmodellierung wie z.B. die RTM (**R**esidual **T**errain **M**odelling)-Methode und die **R**emove-**R**estore-**T**echnik (RRT) erfordern die Berechnung des gravitativen Einflusses von Volumenelementen, die üblicherweise durch Prismen dargestellt werden. Bei der terrestrischen oder flugzeuggestützten Gravitationsfeldbestimmung werden die Formeln für das Potential eines Masskörpers und die ersten Ableitungen benötigt, während die zweiten Ableitungen erforderlich sind, wenn man die Auswirkungen auf Gradiometriedaten, z.B. im Rahmen der Gradiometrie-Mission GOCE (**G**ravity and **S**teady-**S**tate **O**cean **C**irculation **E**xperiment), betrachtet. Neben dem Quader können weitere Massenelemente wie das Tesseroid, die Punktmasse, die Massenlinie und die Massenschicht zur Massenmodellierung verwendet werden. Schwerpunkte dieses Beitrags sind die Reduzierung der Rechenzeit durch Optimierung der numerischen Auswertung der Tesseroidformeln mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) und die parallele Berechnung.

Summary

*The topographic and isostatic reduction methods as well as modern concepts of the gravitational field modelling like e.g. the **R**esidual **T**errain **M**odelling (RTM) and the **R**emove-**R**estore-**T**echnique (RRT) require the computation of the gravitational influence of volume elements, which are usually represented by prisms. In terrestrial or airborne gravity field determination the formulae for the potential and its first order derivatives have to be evaluated, while second order derivatives are related to the analysis of upcoming satellite gravity gradiometry missions of GOCE (**G**ravity and **S**teady-**S**tate **O**cean **C**irculation **E**xperiment) type. In addition to the subdivision of the topographic/isostatic masses into prisms, there exist other mass elements like tesseroids, point masses, mass lines or mass layers. In this contribution, the focus is put on the optimization of the numerical evaluation of the tesseroid formulae via Gauss-Legendre cubature (3D) and parallel computing procedures.*

1 Einleitung

Die Modellierung von topographischen und isostatischen Massen hat eine zentrale Bedeutung in der Geodäsie. Generell können zwei Arten der Modellierung unter-

schieden werden: die Modellierung im Ortsbereich und im Spektralbereich. Unter der Ortsbereichmodellierung versteht man die Unterteilung und Approximation der topographischen und isostatischen Massen durch einzelne Massenelemente und deren analytische und numerische Berechnungsmethoden. Die Entwicklung des Gravitationspotentials und seiner ersten und zweiten Ableitungen in Kugelfunktionsreihen (Forsberg 1984; Schwarz et al. 1990) bildet die Modellierung im Spektralbereich.

Neben der kartesischen Gitternetzeinteilung werden in der Praxis oftmals die geographischen Gitternetzlinien als Abgrenzung der einzelnen Massenelemente herangezogen und die Grundfläche eines Massenelements durch ein Rechteck approximiert. Es eignen sich folglich Quader zur Approximation, wie u. a. in Mader (1951), Forsberg (1984), Nagy (1966), Tsoulis (1999) und Nagy et al. (2000, 2002) beschrieben, für die eine analytische Lösung existiert. In Anderson (1976), Seitz und Heck (2001) und Heck und Seitz (2007) wird weiterhin das Tesseroid als alternatives Massenelement vorgestellt. Hier ist es möglich, das elementar analytisch nicht lösbare Volumenintegral rein numerisch mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) zu lösen oder den Integranden in eine Taylorreihe zu entwickeln bzw. eine radiale Integration der Volumenintegrale analytisch durchzuführen und die 2D-Flächenintegrale numerisch zu berechnen (Martinec 1998; Novák et al. 2001; Heck 2003). In Grüninger (1990) und Kuhn (2000, 2003) werden neben den schon genannten Massenelementen die Punktmasse, die Massenlinie und die Massenschicht vorgestellt.

In Wild-Pfeiffer (2007) werden numerische Untersuchungen zur Berechnung der topographisch-isostatischen Massen im Orts- und Spektralbereich durchgeführt, aber global über die ganze Erde nur bis zu einer Auflösung $30' \times 30'$, da eine Erhöhung der Auflösung insbesondere bei der Modellierung im Ortsbereich zu sehr hohen Rechenzeiten führt. Ein Schwerpunkt dieses Beitrags ist deshalb die Optimierung der numerischen Berechnung des elliptischen Integrals eines Tesseroids mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) durch Variation der Anzahl der Knoten, um Rechenzeit einzusparen. Ebenso stellt die Parallelverarbeitung eine weitere Möglichkeit zur Effektivitätssteigerung dar.

2 Modellierung des Potentials und seiner ersten und zweiten Ableitungen durch verschiedene Massenkörper

Das Potential der Massen der Erde oder eines anderen Himmelskörpers lässt sich mittels des Newton-Integrals in sphärischen Koordinaten beschreiben:

$$V(Q) = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho}{\ell} d\Omega$$

mit $\Omega = \Omega(\lambda', \varphi', \xi)$, $0 \leq \lambda' < 2\pi$, $-\pi/2 \leq \varphi' \leq \pi/2$,

$$0 \leq \xi \leq r(\lambda', \varphi'), \quad (1)$$

wobei $r(\lambda', \varphi')$ den Radius der Erdoberfläche, $G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ die Gravitationskonstante, ρ die ortsabhängige Dichte, ℓ den Abstand zwischen dem Aufpunkt (λ, φ, r) und dem variablen Quellpunkt $(\lambda', \varphi', \xi)$ und $d\Omega$ das Volumenelement darstellt.

Für die gravitative Anziehung gilt in kartesischen Koordinaten:

$$\mathbf{g} = \text{grad } V = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \quad \frac{\partial V}{\partial y} \quad \frac{\partial V}{\partial z} \right)^T. \quad (2)$$

Für die in der Gradiometrie benötigten 2. Ableitungen folgt:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \text{grad } \mathbf{g} = \text{grad grad } V = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \\ \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ \dots & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Aufgrund der Wirbelfreiheit des Gravitationsfelds ist der Tensor der 2. Ableitungen, auch Marussi-Tensor genannt, symmetrisch. Mit der für harmonische Funktionen gültigen Laplacegleichung gilt weiterhin

$$\Delta V = \text{sp } \mathbf{M} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (4)$$

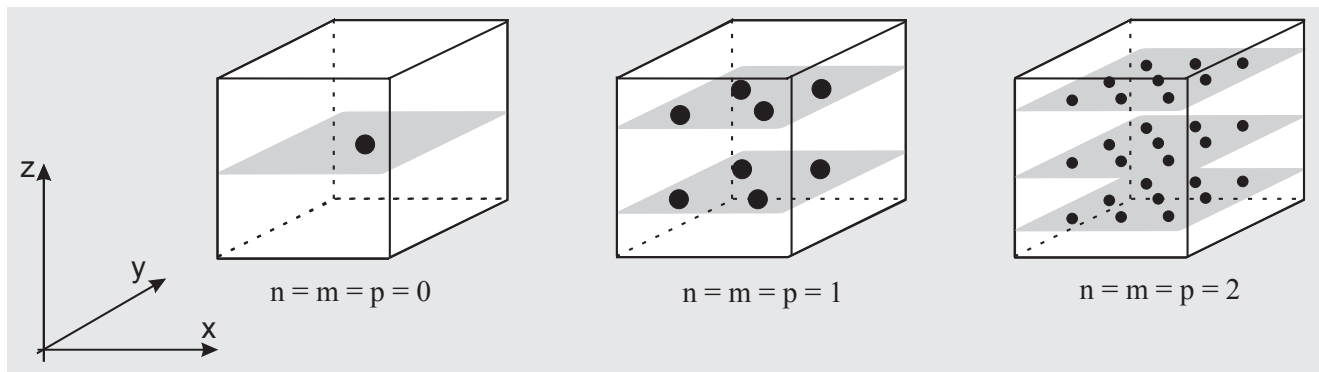
d.h. der Tensor \mathbf{M} besteht aus fünf voneinander unabhängigen Komponenten. Die Darstellung des Marussi-Tensors \mathbf{M} in sphärischen Koordinaten ist in Tscherning (1976) zu finden. Die Modellierung der Massen erfolgt durch eine Aufteilung in einzelne Volumenelemente Ω_i , wobei angenommen wird, dass die Dichte ρ_i in Ω_i konstant ist:

$$V(Q) = G \sum_i \rho_i \iiint_{\Omega_i} \frac{d\Omega}{\ell}. \quad (5)$$

Das Volumenintegral ist analytisch lösbar für einen Quader bzw. für die vom Quader ableitbaren Massenelemente Punktmasse, Massenlinie und Massenschicht. Im Fall des Tesseroids, das durch geographische Gitterlinien und konzentrische Kugeln konstanter Höhe begrenzt ist (siehe Heck und Seitz 2007), existiert keine analytische Lösung. Eine Variante das Dreifachintegral zu lösen, stellt die Taylorreihenentwicklung dar, wobei der Term nullter Ordnung der Punktmasse entspricht. Eine Alternative (halbanalytische Methode) ist die Aufteilung des Volumenintegrals in ein analytisch lösbares, eindimensionales Integral über den radialen Parameter ξ und ein zweidimensionales Flächenintegral, das mittels numerischer Methoden, z.B. der Gauß-Legendre-Kubatur (2D), gelöst werden kann. Im Fall der zweiten radialen Ableitung sind die entsprechenden Formeln in Wild und Heck (2005) zu finden. Eine dritte Methode stellt die rein numerische Auswertung mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) dar.

In Wild (2006) und Wild-Pfeiffer (2007) werden die einzelnen Massenelemente und deren Berechnungsmethoden mit der exakten Lösung einer sphärischen Kappe verglichen. Das Ergebnis ist, dass das Tesseroid, unabhängig von seiner Berechnungsmethode, die beste Approximation darstellt. Die rein numerische Lösung mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) mit $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Knoten pro Element liefert wie die analytische Integration nach dem Radius r und die Gauß-Legendre-Kubatur (2D) praktisch identische Ergebnisse. Die Modellierung mittels Taylorreihenentwicklung ist um den Faktor 2 schlechter. Der Gesamtfehler gegenüber der Soll-Lösung der sphärischen Kappe ist drei Größenordnungen kleiner als derjenige der anderen Massenelemente Quader, Punktmasse, Massenlinie und Massenschicht. Die Genauigkeit für diese Massenelemente entspricht der Modellierung der vertikalen, analytischen Integration und Gauß-Legendre-Kubatur (2D) sowie Gauß-Legendre-Kubatur (3D) mit einem Knoten pro Element. Die Rechenzeit für die M_{zz} -Komponente ist bei der Punktmasse die kürzeste; sie beträgt weniger als 1/10 der Rechenzeit des Quaders. Die Rechenzeit eines Tesseroids variiert im Fall der halbanalytischen Methode und der rein numerischen Methode mit der Anzahl der Knoten im zweidimensionalen Fall bis zu 70 % (max. 6^3 Knoten), im dreidimensionalen Fall bis zu 30 % der Rechenzeit des Quaders (max. 3^3 Knoten). Die Modellierung mittels Taylorreihenentwicklung benötigt 15 %, die Berechnung mittels Massenlinie und Massenschicht ca. 10 % bis 20 % der Rechenzeit des Quaders.

Der Vergleich der Modellierung im Ortsbereich und im Spektralbereich in Wild-Pfeiffer (2007) zeigt, dass die Gauß-Legendre-Kubatur (3D) mit einem Knoten pro Element die größten Differenzen zwischen beiden Modellierungen aufweist und die numerische Auswertung mit $2^3 = 8$ Knoten um den Faktor 10^3 bzw. mit $3^3 = 27$ Knoten pro Element um den Faktor 10^6 genauer ist als die Auswertung mit einem Knoten. Jedoch weichen alle Modellierungen bis $3^3 = 27$ Knoten je nach Höhe der Topographie um den Faktor 10 bzw. 100 von der Modellierung im

Abb. 1: Numerische Lösung mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) bis $n=m=p=2$

Spektralbereich ab. Die Differenzen liegen aber insgesamt unterhalb der Messgenauigkeit des GOCE-Gradiometers, die ca. 1–2 mE.U. (10^{-12} s^{-2}) beträgt. Da die Auswertung mit $3^3 = 27$ Knoten sehr zeitintensiv ist (vgl. Wild-Pfeiffer 2007), wird vorgeschlagen, je nach Verhältnis der horizontalen zur vertikalen Dimension die Stützstellenanzahl zu variieren (siehe Kap. 3.1).

Eine weitere Möglichkeit Rechenzeit einzusparen besteht darin, die Programme zu parallelisieren und die Auswertung auf Parallelrechnern durchzuführen (siehe Kap. 3.2).

3 Numerische Tests

3.1 Optimierung der numerischen Modellierung mittels Gauß-Legendre-Kubatur

Ausgehend vom Newton-Integral (1) kann das Dreifachintegral rein numerisch mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) gelöst werden. Hierbei wird pro Integrationsvariable (siehe Burden und Faires 1993; Klees 1992; Stroud 1974) eine Quadraturformel angewandt. D.h. in allgemeiner Form lässt sich das Volumenintegral

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

mit

$$V = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\} \quad (6)$$

durch

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^p w_i w_j w_k f(x_i, y_j, z_k) \end{aligned} \quad (7)$$

approximieren. Jedes beliebige Dreifachintegral wird durch eine lineare Transformation auf den Einheitswürfel

$[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ zurückgeführt. Die Lage der Knoten x_i , y_j und z_k ist Abb. 1 zu entnehmen.

Die Gesamtanzahl der Knoten steigt pro Exaktheitsgrad und ist $(n+1) \cdot (m+1) \cdot (p+1)$. Die Gewichte w_i , w_j , w_k sind u. a. in Engeln-Müllges und Reutter (1987), Faires und Burden (2003) und Stroud (1974) aufgelistet.

Da die Rechenzeit pro Exaktheitsgrad steigt, ist die Berechnung für $n=m=p=2$ ($3^3 = 27$ Knoten) sehr zeitintensiv (siehe Wild-Pfeiffer 2007). Grundlage der numerischen Berechnungen in Wild-Pfeiffer (2007) ist daher die Modellierung mit $n=m=p=1$ ($2^3 = 8$ Knoten). Des Weiteren wurde vorgeschlagen, im Nahbereich die Anzahl der Knoten relativ hoch zu wählen, d. h. z. B. $n=m=p=2$ ($3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ Knoten) und im Fernbereich die Knotenanzahl durch die Wahl von Punktmassen mit $n=m=p=0$ zu reduzieren. Generell ist es möglich, die vertikale Auflösung – abhängig von der Topographie – gegenüber der Auflösung in horizontaler Richtung zu variieren, d. h. $n=m=1$ und $p=0$ bis $p=5$. Für den Fall $p=5$ mit $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$ Knoten ist die Anzahl der Funktionsauswertungen immer noch geringer als die bisher untersuchte Anzahl mit $n=m=p=2$.

Die numerische Berechnungsmethode wird analog zu Wild-Pfeiffer (2007) exemplarisch anhand der zweiten radialen Ableitung für eine homogene sphärische Kappe um den Berechnungspunkt überprüft. Es wird eine konstante Topographie mit $h = 1000 \text{ m}$ und $h = 10000 \text{ m}$ angenommen. Die sphärische Kappe wird in Tesseroide der Grundfläche $30' \times 30'$ bzw. $5' \times 5'$ zerlegt. Der Berechnungspunkt liegt auf der Polachse in einer Höhe von 260 km, was der Flughöhe der im Frühjahr 2008 geplanten GOCE-Mission entspricht. Für diese spezielle Lage (siehe Abb. 2) existiert eine analytische Lösung für eine sphärische Kappe bzw. mit $\psi_c = 180^\circ$ für eine Kugelschale. Folgende Parameter werden für die Untersuchung verwendet: $R = 6378137 \text{ m}$, $G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ und $\rho_0 = 2670 \text{ kg m}^{-3}$.

In Tab. 1 sind die Abweichungen der Modellierung mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) für verschiedene Werte von n , m und p gegenüber der analytischen Lösung einer Kugelschale für unterschiedliche Auflösungen der Topographie ($30' \times 30'$ und $5' \times 5'$) und für verschiedene Höhen ($h = 1000 \text{ m}$ und $h = 10000 \text{ m}$) dargestellt. Zeilenförmig sind drei Teilabschnitte in Tab. 1 zu unterscheiden. Der obere Abschnitt stellt die Ergebnisse für wachsendes n ,

Tab. 1: Abweichungen der numerischen Modellierungen bezüglich der analytischen Lösung einer Kugelschale ($\psi_c = 180^\circ$) für verschiedene Auflösungen und Höhen h anhand der M_{zz} -Komponente [E.U.]

| | Anzahl der Knoten | 30' × 30' | | 5' × 5' | |
|--|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| | | h = 1000 m | h = 10000 m | h = 1000 m | h = 10000 m |
| n = m = p = 0 | 1 | $6.1739 \cdot 10^{-5}$ | $6.2595 \cdot 10^{-4}$ | $-1.1406 \cdot 10^{-4}$ | $-1.1493 \cdot 10^{-4}$ |
| n = m = p = 1 | 8 | $6.6579 \cdot 10^{-9}$ | $6.9200 \cdot 10^{-8}$ | $-4.4259 \cdot 10^{-9}$ | $-5.0173 \cdot 10^{-8}$ |
| n = m = p = 2 | 27 | $-2.3100 \cdot 10^{-12}$ | $-3.1299 \cdot 10^{-11}$ | $-1.5996 \cdot 10^{-13}$ | $-3.2004 \cdot 10^{-12}$ |
| n = m = 1, p = 0 | 4 | $7.9338 \cdot 10^{-9}$ | $1.3447 \cdot 10^{-6}$ | $-3.1501 \cdot 10^{-9}$ | $1.2255 \cdot 10^{-6}$ |
| n = m = 2, p = 1 | 18 | $-2.6399 \cdot 10^{-12}$ | $-2.9499 \cdot 10^{-11}$ | $-4.9000 \cdot 10^{-13}$ | $4.8001 \cdot 10^{-12}$ |
| n = m = p = 2 ($\psi = 0^\circ \dots 2^\circ$), sonst n = m = p = 0 | 27 ($\psi = 0^\circ \dots 2^\circ$), sonst 1 | $7.1399 \cdot 10^{-5}$ | $7.2489 \cdot 10^{-4}$ | $1.9507 \cdot 10^{-5}$ | $-1.3026 \cdot 10^{-3}$ |
| n = m = p = 2 ($\psi = 0^\circ \dots 2^\circ$), sonst n = m = p = 1 | 27 ($\psi = 0^\circ \dots 2^\circ$), sonst 8 | $6.7018 \cdot 10^{-9}$ | $7.2090 \cdot 10^{-8}$ | $-4.2518 \cdot 10^{-9}$ | $-1.8505 \cdot 10^{-7}$ |
| n = m = p = 2 ($\psi = 0^\circ \dots 2^\circ$), sonst Taylorreihenentw. | 27 ($\psi = 0^\circ \dots 2^\circ$), sonst Taylorreihenentw. | $1.5084 \cdot 10^{-8}$ | $1.5376 \cdot 10^{-7}$ | $-9.0232 \cdot 10^{-9}$ | $1.9128 \cdot 10^{-7}$ |

m und p mit $n=m=p$ dar. Im zweiten Abschnitt wird die Variation der horizontalen und vertikalen Auflösung, im dritten Abschnitt die Variation der Auflösung des Nah- und Fernbereichs untersucht.

Es ist zu erkennen, dass die Abweichungen von der analytischen Lösung einer sphärischen Schale im Allgemeinen mit steigender Anzahl der Funktionsauswertungen abnehmen. Die numerische Auswertung mit einem Knoten stellt die grösste Approximation dar, die Auswertung mit $n=m=p=1$ (8 Knoten) ist für die Höhen $h=1000\text{ m}$ und $h=10000\text{ m}$ um den Faktor 10^3 bzw. für $n=m=p=2$ (27 Knoten) um den Faktor 10^6 genauer. Verglichen mit der Genauigkeit der GOCE-Mission von $1\text{--}2\text{ mE.U.}$ sind die Abweichungen insgesamt sehr klein.

Die Verringerung der vertikalen Auflösung ($p=0$ bzw. $p=1$) gegenüber der horizontalen Auflösung ($n=m=1$ bzw. $n=m=2$) macht unabhängig von der Höhe der Topographie deutlich, dass nur die Genauigkeit der numerischen Auswertung mit $n=m=p=1$ bzw. $n=m=p=2$

erreicht wird. Höhere Werte von p liefern aufgrund der Größe und Form der Massenelemente ($30' \times 30'$ und $5' \times 5'$) praktisch identische Ergebnisse wie $p=0$ bzw. $p=1$. Allerdings liegt die Rechenzeit durch die geringere Anzahl der Knoten bis zur Hälfte unter der Rechenzeit für $n=m=p=1$ bzw. $n=m=p=2$.

Die Erhöhung der Anzahl der Stützstellen im Nahbereich ($\psi=0^\circ \dots 2^\circ$) verbessert im globalen Fall – unabhängig von der Auflösung und Höhe der Topographie – die Genauigkeit nur geringfügig. Dies gilt sowohl für die rein numerische Modellierung des Fernbereichs mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) als auch für die Modellierung mittels Taylorreihenentwicklung des Integranden (siehe Wild-Pfeiffer 2007). Rechenzeit kann durch die Aufspaltung in Nah- und Fernbereich nicht eingespart werden.

Ursache für die geringe Steigerung der Genauigkeit bei der Variation der horizontalen und vertikalen Auflösung sowie der Aufspaltung in Nah- und Fernbereich könnte die lineare Transformation des Volumenintegrals auf den Einheitswürfel sein. Die Anwendung der kubischen Transformation nach Telles (siehe Klees 1992), die sich konkret in den Gewichten äußert, ist eine Alternative. Allerdings muss beachtet werden, dass der benötigte Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf steigt, da die Lage der Knoten und die Gewichte von der Lage des Aufpunkts abhängen.

Bei der Differenzierung in Nahbereich und in Fernbereich liegt es eher nahe, den Quader in der direkten Umgebung eines Berechnungspunkts einzusetzen, im Nahbereich das Tesseroid und im Fernbereich die Punktmasse, Massenlinie oder Massenschicht, was in diesem Beitrag nicht weiter untersucht wird. Alternativ könnte der Nahbereich auch mittels kubischer Transformation nach Telles modelliert werden, da nach Klees (1992) bei geringem Abstand des Aufpunkts vom Integrationsgebiet die kubische Transformation der linearen Transformation überlegen ist.

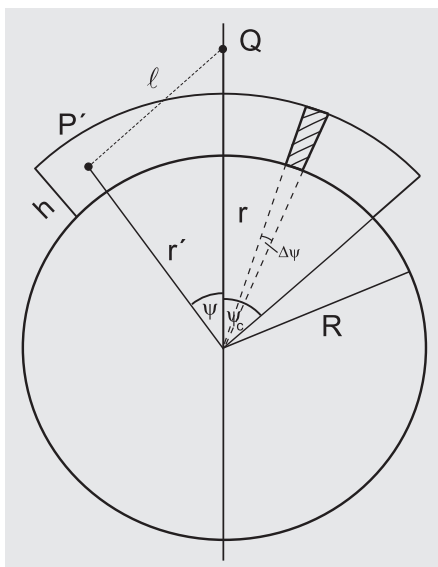


Abb. 2:
Sphärische
Kappe mit
sphärischem
Radius ψ_c

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Rechenzeit der numerischen Auswertung durch eine unterschiedliche Wahl der horizontalen und vertikalen Auflösung in globalen Untersuchungen reduziert werden kann. Auch in regionalen Untersuchungen ist eine Genauigkeitssteigerung durch eine höhere vertikale Auflösung zu erwarten, wenn die Massenkörper deutlich kürzere Grundseiten als Höhen aufweisen.

3.2 Programmoptimierung und Parallelverarbeitung

In Wild (2006) und Wild-Pfeiffer (2007) wird gezeigt, dass speziell die Berechnung des Potentials eines Quaders und seiner ersten und zweiten Ableitungen sehr zeitaufwändig ist. Ferner wird in Wild-Pfeiffer (2007) im Vergleich der Modellierung im Ortsbereich (Gauß-Legendre-Kubatur (3D); $n=m=p=1$; $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Knoten) mit der im Spektralbereich deutlich, dass die Rechenzeit für die Approximation durch die einzelnen Massenelemente bei einer Auflösung von $30' \times 30'$ um den Faktor 50 langsamer ist als die Kugelfunktionsdarstellung (berechnet mit AMD XP 2400+-Prozessor, 2.0 GHz). Im Hinblick auf eine höhere Auflösung der Topographie und die damit verbundene Rechenzeit wurde deshalb vorgeschlagen, die Ortsbereichsmodellierung auf regionale Anwendungen zu beschränken bzw. die Modellierung im Spektralbereich in globalen Anwendungen zu bevorzugen.

Bei paralleler Verarbeitung ist eine deutliche Reduktion der Rechenzeit für die Ortsbereichsmodellierung möglich. Im Hinblick auf die im Frühjahr 2008 startende Satellitenmission GOCE wird im Folgenden anhand der Berechnung des Marussi-Tensors M_{ij} eines Quaders (siehe Gleichung (3.51) in Wild-Pfeiffer 2007) gezeigt, welches Potential in der parallelen Prozessierung steckt. Alle Tensoren wurden hier durch Quader approximiert.

Generell haben die sequentiellen Programme für alle erwähnten Massenelemente den in Abb. 3 dargestellten Aufbau.

Für jeden Satellitenpunkt (Breite, Länge Satellit) wird der Einfluss jedes einzelnen Quaderelements (Breite,

Länge Topographie) berechnet. Im Falle des Marussi-Tensors sind in den Diagonalelementen 24 arctan-Operationen sowie 24 Additionen pro Massenelement und in den Nebendiagonalelementen 24 log-Operationen sowie 24 Additionen durchzuführen.

Eine Optimierung der sequentiellen Umsetzung stellt die Zusammenfassung der 24 Logarithmen + 24 Additionen zu 3 Logarithmen, 18 Multiplikationen und 3 Divisionen dar, was ca. dreimal so schnell ist bzw. einen Faktor 1.4 in der Gesamtlaufzeit ausmacht. Außerdem beeinflusst die Verwendung von double-Werten anstelle von long double-Werten die Berechnung abhängig von der Prozessorarchitektur. Dies beschleunigt Itanium-Prozessoren (vgl. Tab. 2) um ca. den Faktor 1.6, Opteron-Prozessoren um ca. den Faktor 4 und Pentium 4-Prozessoren um ca. den Faktor 3.5.

Aus der Information, dass die Spur des Marussi-Tensors verschwindet (Gleichung (4)), kann ferner eines der Diagonalelemente aus der Summe der beiden anderen berechnet werden, womit 8 arctan-Operationen und 8 Additionen eingespart werden können.

Grundsätzlich ist es wichtig, den vorhandenen sequentiellen Code hinsichtlich der verwendeten mathematischen Operationen, des Wertebereichs der Variablen etc. zu optimieren, um die Laufzeit, die Speicherbandbreite und die Cachenutzung zu verbessern.

Bei heutigen Parallelrechnern kann generell zwischen zwei Architekturansätzen unterschieden werden: den speichergekoppelten und den nachrichtengekoppelten Rechnern. Die speichergekoppelten Rechner tauschen Daten zwischen den einzelnen Prozessoren über einen gemeinsamen Speicher aus, was einerseits die Programmierung erleichtert, andererseits die maximale Anzahl der Prozessoren bei heutigem Stand der Technik auf ca. 8 bis 16 beschränkt. Der gemeinsame Speicher ist bei Anwendungen mit hohem Speicherbandbreitenbedarf häufig der Engpass, der eine gute Skalierung verhindert. Als Programmierstandard hat sich der OpenMP-Standard (OpenMP 1997) weitgehend durchgesetzt.

Nachrichtengekoppelte Parallelrechner sind dagegen auf ein Kommunikationsnetz und explizite Kommunikationskommandos zum Datenaustausch angewiesen. Dies erhöht zwar den Kommunikations-overhead und erschwert die Programmierung, führt aber zu großen und leistungsfähigen Rechnern mit hunderten bis tausenden Prozessoren. Hier hat sich MPI (MPI 1994) als Standard durchgesetzt.

In Abb. 4 ist der Aufbau des mittels OpenMP parallelisierten Programms

```

for m = 0 to ...      // Breite Satellit
  for l = 0 to ...     // Länge Satellit
    for n = 0 to ...   // Breite Topographie
      for o = 0 to ... // Länge Topographie
        quaderMij[m, l] = quaderMij[m, l] + Beitrag(m,l,n,o)
      end
    end
  end
end
end

```

Abb. 3: Sequentieller Aufbau der Programme zur Berechnung des gravitativen Einflusses der einzelnen Massenkörper am Beispiel der Einteilung in Quader

```
#pragma omp parallel for private(m, l, n, o)
for ml = 0 to ... * ... // Länge und Breite Satellit
  m = ml div ...
  l = ml mod ...

  for n = 0 to ... // Breite Topographie

    for o = 0 to ... // Länge Topographie

      quaderMij[m, l] = quaderMij[m, l] + Beitrag(m,l,n,o)

    end

  end

end
```

Abb. 4: Aufbau der mittels OpenMP parallelisierten Programme zur Berechnung des gravitativen Einflusses der einzelnen Massenkörper am Beispiel der Einteilung in Quader

zu sehen. Im Unterschied zur sequentiellen Umsetzung werden hier die äußeren for-Schleifen des Satelliten zwecks besserer Lastverteilung zusammengefasst, durch den #pragma-Befehl wird die Parallelisierung markiert.

Etwas komplexer ist die in Abb. 5 dargestellte Parallelisierung durch MPI. Hier werden die Topographiedaten sequentiell eingelesen, an alle Prozessoren verteilt und jedes Arbeitspaket für den einzelnen Prozessor bestimmt. Nach der Berechnung des gravitativen Einflusses der einzelnen Massenkörper werden die Ergebnisse mittels des Befehls MPI_Gatherv wieder eingesammelt.

Um die einzelnen Fortschritte der sequentiellen Berechnung, der optimierten sequentiellen Berechnung und der Parallelisierung durch OpenMP und MPI darzustellen, werden für eine Auflösung von $1^\circ \times 1^\circ$ des digitalen Geländemodells JGP95E »rock-equivalent« (Komprimierung der Wassermassen auf eine Dichte $\rho_0 = 2.67 \text{ g cm}^{-3}$)

schen sequentieller und optimierter sequentieller Berechnung bzw. paralleler Verarbeitung mittels OpenMP und MPI mit variabler Anzahl von Prozessoren unterschieden wird. In den Spalten sind die für den Vergleich genutzten Rechner aufgelistet: 2 Standard-PCs mit Athlon XP 3200+-Prozessor bzw. Pentium 4-Prozessor und 2 Hochleistungsrechner mit Itanium 2-Prozessoren bzw. Dual Core Opteron-Prozessoren.

Für jede Konfiguration sind in Tab. 2 die absolute Rechenzeit in Sekunden und ein auf die sequentielle Berechnung des Athlon XP 3200+-Prozessors bezogener Faktor aufgelistet, der die Beschleunigung der Rechenzeit angibt. Die sequentielle Berechnung des Athlon XP 3200+-Prozessors erhält daher den Faktor 1. Es wird deutlich, dass es wichtig ist, erst das sequentielle Programm zu optimieren, bevor es parallelisiert wird. Die Optimierung macht, abhängig vom Prozessortyp, eine Verringerung

der Rechenzeit von 50% bis 80% aus. Es ist auch zu erkennen, dass der Speedup, das Verhältnis der Laufzeiten zwischen bester sequentieller Implementierung und paralleler Laufzeit, nahezu optimal ist. D.h. bei der Verwendung von z.B. 4 Prozessoren läuft das Programm sowohl bei Itanium 2-Prozessoren als auch bei Opteron-Prozessoren viermal so schnell durch.

Das Fazit dieser Untersuchung ist, dass sich das hier vorgestellte Problem sehr gut zur parallelen Verarbeitung eignet. Eine schon heute im Handel übliche Workstation mit 2 Quad Core-Prozessoren

```
sequentielles Einlesen der Topographiedaten durch Prozessor 0

Broadcast der Topographiedaten an alle Prozessoren

Bestimmung der Arbeitspakete (firstml, lastml) für die einzelnen Prozessoren

for ml = first_ml to last_ml // Länge und Breite Satellit
  m = ml div ...
  l = ml mod ...

  for n = 0 to ... // Breite Topographie

    for o = 0 to ... // Länge Topographie

      quaderMij[m, l] = quaderMij[m, l] + Beitrag(m,l,n,o)

    end

  end

end

Einsammeln der quaderMij mittels MPI_Gatherv

Ausgabe auf Prozessor 0
```

Abb. 5: Aufbau der mittels MPI parallelisierten Programme zur Berechnung des gravitativen Einflusses der einzelnen Massenkörper am Beispiel der Einteilung in Quader

Tab. 2: Vergleich der absoluten Rechenzeiten und des Beschleunigungsfaktors der sequentiellen, optimierten sequentiellen und mittels OpenMP bzw. MPI parallelisierten Berechnung für verschiedene Prozessortypen

| | Athlon 3200+ 2.2 GHz | | Pentium 4 3.4 GHz | | Itanium 2 1.6 GHz | | Itanium 2 1.5 GHz | | Dual Core Opteron 2.6 GHz | |
|------------------------|-------------------------|--------|----------------------|--------|----------------------|--------|----------------------|--------|------------------------------|--------|
| | s | Faktor | s | Faktor | s | Faktor | s | Faktor | s | Faktor |
| sequentiell | 33727 | 1.0 | 30558 | 1.1 | 16072 | 2.1 | 17269 | 1.9 | 23628 | 1.4 |
| sequentiell, optimiert | 9870 | 3.4 | 6345 | 5.3 | 8009 | 4.2 | 8572 | 3.9 | 4226 | 8.0 |
| OpenMP, 1 Prozess. | | | | | 7978 | 4.2 | | | 4233 | 8.0 |
| OpenMP, 2 Prozess. | | | | | 3996 | 8.4 | | | 2119 | 15.9 |
| OpenMP, 4 Prozess. | | | | | 2001 | 16.9 | | | 1081 | 31.2 |
| OpenMP, 6 Prozess. | | | | | 1336 | 25.2 | | | | |
| OpenMP, 8 Prozess. | | | | | 1009 | 33.4 | | | | |
| MPI, 1 Prozess. | | | | | | | 8595 | 3.9 | 4299 | 7.8 |
| MPI, 2 Prozess. | | | | | | | 4325 | 7.8 | 2166 | 15.6 |
| MPI, 4 Prozess. | | | | | | | 2149 | 15.7 | 1086 | 31.1 |
| MPI, 8 Prozess. | | | | | | | 1087 | 31.0 | 552 | 61.1 |
| MPI, 16 Prozess. | | | | | | | 543 | 62.1 | 279 | 120.9 |
| MPI, 32 Prozess. | | | | | | | 273 | 123.5 | 139 | 242.6 |
| MPI, 64 Prozess. | | | | | | | 139 | 242.6 | 71 | 475.0 |
| MPI, 128 Prozess. | | | | | | | | | 37 | 911.5 |

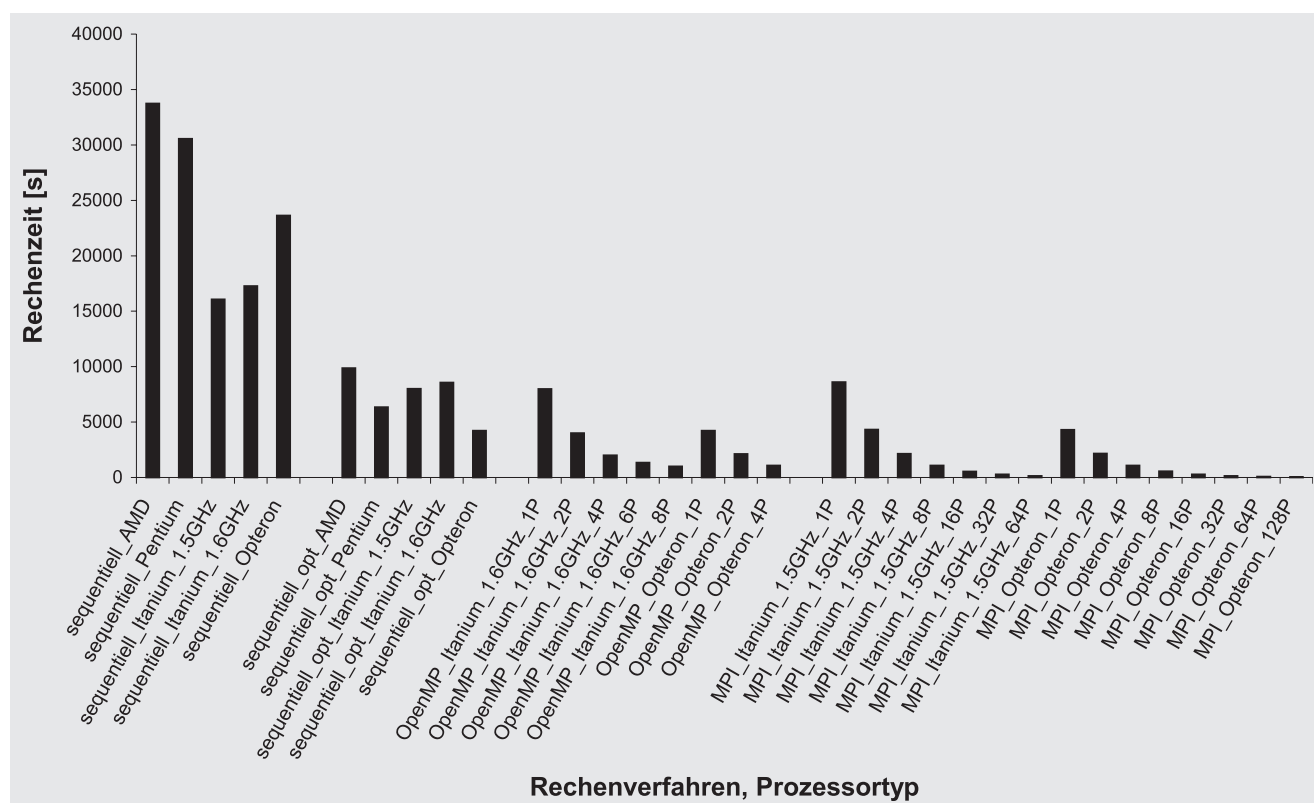


Abb. 6: Vergleich der absoluten Rechenzeiten der sequentiellen, optimierten sequentiellen und OpenMP bzw. MPI parallelisierten Berechnung für verschiedene Prozessortypen

(ca. 2800 Euro, Stand: Oktober 2007) würde in Tab. 2 einen Beschleunigungsfaktor 50 erreichen. Des Weiteren wird die gewohnte exponentielle Steigerung der Rechenleistung in den nächsten Jahren überwiegend durch Er-

höhung der Anzahl der Rechenkerne erfolgen. Es ist daher wichtig, die Scheu vor einer Parallelisierung zu verlieren und die Angebote, Hochleistungsrechner an den Universitäten zu nutzen, anzunehmen.

4 Schlussfolgerung und Ausblick

Die numerischen Ergebnisse zeigen, dass eine Reduzierung der Rechenzeit sowohl durch eine Optimierung der numerischen Modellierung eines Tesseroids mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) in globalen Untersuchungen bei Auflösungen von $30' \times 30'$ bzw. $5' \times 5'$ möglich ist, als auch durch eine Parallelisierung der Programme.

Eine Variation der vertikalen Auflösung ($p=0$) gegenüber der horizontalen Auflösung ($n=m=1$) liefert praktisch identische Ergebnisse wie $n=m=p=1$ ($2 \cdot 2 \cdot 2$ Knoten), verringert aber die Rechenzeit durch die geringere Anzahl von Funktionsauswertungen um ca. die Hälfte. Die geringe Genauigkeitssteigerung der Variation von horizontaler und vertikaler Auflösung ist auf die lineare Transformation des Volumenintegrals in den Einheitswürfel zurückzuführen. Eine Alternative hierzu stellt die hier nicht weiter untersuchte kubische Transformation nach Telles dar.

Das hier vorgestellte Problem der Berechnung des Gravitationspotentials von Massen, der ersten und zweiten Ableitungen eignet sich sehr gut zur parallelen Verarbeitung. Je nach Art der parallelen Berechnung, Anzahl der Prozessoren und Prozessortyp und -leistung kann ein Beschleunigungsfaktor von 33 (OpenMP, 8 Prozessoren, Itanium 2 1.6GHz) bis 911 (MPI, 128 Prozessoren, Dual Core Opteron 2.6GHz) erreicht werden.

Dank

Herzlicher Dank gebührt Herrn Dr. rer. nat. Holger Obermaier vom Rechenzentrum der Universität Karlsruhe, Abteilung Scientific Supercomputing, für die gemeinsame Parallelisierung der Programme. Des Weiteren danken die Autoren den beiden Reviewern für ihre konstruktiven Anmerkungen.

Literatur

- Anderson E.G.: The effect of topography on solutions of Stokes' problem. Rep Unisurv S-14, School of Surveying, University of New South Wales, Kensington, Australia, 1976.
- Burden R.L., Faires J.D.: Numerical Analysis. Fifth Edition. PWS Publishing Company, Boston, 1993.
- Engeln-Müllges G., Reutter F.: Numerische Mathematik für Ingenieure. BI Wissenschaftsverlag, Zürich, 1987.
- Faires D., Burden R.: Numerical Methods. Third Edition. Thomson Brooks/Cole, United States, 2003.
- Forsberg R.: A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling. Rep 355, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus OH, 1984.
- Grüniger W.: Zur topographisch-isostatischen Reduktion der Schwere. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1990.
- Heck B.: On Helmert's methods of condensation. J Geod 77: 155–170 DOI: 10.1007/s00190-003-0318-5, 2003.
- Heck B., Seitz K.: A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling. J Geod 81: 121–136 DOI: 10.1007/s00190-006-0094-0, 2007.

- Klees R.: Lösung des fixen geodätischen Randwertproblems mit Hilfe der Randelementmethode. Reihe C, Heft Nr. 382, Deutsche Geodätische Kommission, München, 1992.
- Kuhn M.: Geoidbestimmung unter Verwendung verschiedener Dichtehypothesen. Reihe C, Heft Nr. 520, Deutsche Geodätische Kommission, München, 2000.
- Kuhn M.: Geoid determination with density hypotheses from isostatic models and geological information. J Geod 77: 50–65 DOI: 10.1007/s00190-002-0297-y, 2003.
- Mader K.: Das Newtonsche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung. Österr Z Vermess Sonderheft 11, Österreichische Kommission für Int. Erdmessung, 1951.
- Martínez Z.: Boundary-value problems for gravimetric determination of a precise geoid. Lecture notes in Earth Sciences 73, Springer Berlin Heidelberg New York, 1998.
- MPI: <http://www-unix.mcs.anl.gov/mpi/>, 1994.
- Nagy D.: The gravitational attraction of a right rectangular prism. Geophysics 31: 362–371, 1966.
- Nagy D., Papp G., Benedek J.: The gravitational potential and its derivatives for the prism. J Geod 74: 552–560 DOI: 10.1007/s001900000116, 2000.
- Nagy D., Papp G., Benedek J.: Corrections to »The gravitational potential and its derivatives for the prism«. J Geod 76: 475 DOI: 10.1007/s00190-002-0264-7, 2002.
- Novák P., Vaniček P., Martinec Z., Veronneau M.: Effects of the spherical terrain on gravity and the geoid. J Geod 75: 491–504 DOI: 10.1007/s001900100201, 2001.
- OpenMP: <http://www.openmp.org>, 1997.
- Schwarz K.P., Sideris M.G., Forsberg R.: The use of FFT techniques in physical geodesy. Geophys J Int 100: 485–514, 1990.
- Seitz K., Heck B.: Tesseroids for the calculation of topographic reductions. Abstracts »Vistas for Geodesy in the New Millennium«. IAG 2001 Scientific Assembly 2–7 September 2001, Budapest, Hungary, 2001.
- Stroud A.H.: Numerical Quadrature and Solution of Ordinary Differential Equations. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1974.
- Tscherning C.C.: Computation of the Second-Order Derivatives of the Normal Potential Based on the Representation by a Legendre Series. manuscripta geodaetica 1(1): 71–92, 1976.
- Tsoulis D.: Analytical and numerical methods in gravity field modelling of ideal and real masses. Reihe C, Heft Nr 510, Deutsche Geodätische Kommission, München, 1999.
- Wild F., Heck B.: A comparison of different isostatic models applied to satellite gravity gradiometry. In: Jekeli C., Bastos L., Fernandes J. (eds.) Gravity, Geoid and Space Missions, Springer, Berlin Heidelberg New York, pp 230–235, 2005.
- Wild F.: A comparison of different mass elements for use in gravity gradiometry, Submitted to J Geod for publication, 2006.
- Wild-Pfeiffer F.: Auswirkungen topographisch-isostatischer Massen auf die Satellitengradiometrie. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 604, München, 2007.

Anschrift der Autoren

Dr.-Ing. Franziska Wild-Pfeiffer
Institut für Navigation, Universität Stuttgart
Breitscheidstraße 2, 70174 Stuttgart
Fax: +49 711 685 82755
wild-pfeiffer@nav.uni-stuttgart.de

Dipl. Inform. Werner Augustin
Rechenzentrum, Universität Karlsruhe (TH)
76128 Karlsruhe
Fax: +49 721 32550
werner.augustin@rz.uni-karlsruhe.de

Prof. Dr.-Ing.habil. Dr. h.c. Bernhard Heck
Geodätisches Institut, Universität Karlsruhe (TH)
Englerstraße 7, 76128 Karlsruhe
Fax: +49 721 608 6808
heck@gik.uni-karlsruhe.de