

# Hochpräzise Bestimmung eines astrogeodätischen Quasigeoidprofils im Harz für die Validierung des Quasigeoidmodells GCG05

Christian Hirt, Uwe Feldmann-Westendorff, Heiner Denker, Jakob Flury,  
Cord-Hinrich Jahn, Andreas Lindau, Günter Seeber und Christian Voigt

## Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag wird die Messung, Berechnung und Analyse eines hochpräzisen astrogeodätischen Quasigeoidprofils zur Validierung des gravimetrischen Quasigeoidmodells GCG05 im Testgebiet Harz vorgestellt. Mit dem Hannoverschen Zenitkamerasystem TZK2-D wurden dazu neue Lotabweichungsstationen im Abstand von 500–600 m entlang einer 63 km langen Traverse über den Harz bestimmt. Die Berechnung des astrogeodätischen Quasigeoidprofils erfolgte mit dem Verfahren des astronomisch-topographischen Nivellements unter Verwendung von hochauflösenden DGM-Daten für die Lotabweichungsinterpolation. Die Genauigkeit des astrogeodätischen Quasigeoidprofils wurde mit etwa 1.5–2 mm abgeschätzt. Der Vergleich zwischen der astrogeodätischen Lösung und dem gravimetrischen Modell GCG05 zeigt mit einem RMS-Wert von etwa 3 mm und maximalen Abweichungen von etwa 7 mm eine sehr gute Übereinstimmung.

## Summary

*This paper deals with the determination of a high-precision astrogeodetic quasigeoid profile for the validation of the gravimetric quasigeoid model GCG05 in the Harz mountains in Northern Germany. The Hannover Digital Zenith Camera System TZK2-D was used for the observation of new vertical deflection data at densely spaced stations (500–600 m average station spacing) along a 63 km long traverse over the Harz mountains. For the computation of the astrogeodetic quasigeoid profile, the method of astronomical-topographic levelling was applied, using digital terrain model data for the interpolation of vertical deflections. The accuracy of the astrogeodetic quasigeoid profile has been estimated to be about 1.5–2 mm. The comparison between the astrogeodetic solution and the gravimetric model GCG05 shows a RMS error of about 3 mm and maximum differences of 7 mm.*

## 1 Einleitung

Die präzise Geoid- und Quasigeoidmodellierung hat vor dem Hintergrund der satellitengestützten Höhenbestimmung in den letzten Jahren stetig an Bedeutung gewonnen. Quasigeoidmodelle werden benötigt, um mit Satellitenverfahren (z.B. GPS) bestimmte geometrische Höhen  $h$

in physikalische Gebrauchshöhen  $H^N$  (Normalhöhen über Normalhöhennull)

$$H^N = h - \zeta \quad (1)$$

zu überführen, wobei  $\zeta$  die Höhenanomalie (Höhe des Quasigeoides über dem Ellipsoid) bezeichnet. Aktuelle Forschungsarbeiten haben gezeigt, dass die GPS-Höhenbestimmung mit Genauigkeiten von besser als 1 cm möglich ist (z.B. Feldmann-Westendorff und Jahn 2006). Mit einem Quasigeoidmodell vergleichbarer Genauigkeit kann die satellitengestützte Bestimmung von Gebrauchshöhen  $H^N$  auf dem cm-Genauigkeitsniveau erfolgen. Für viele Anwendungen in der Geodäsie und ihren Nachbardisziplinen ist die satellitengestützte Gebrauchshöhenbestimmung (»GPS-Nivelllement«) damit eine wirtschaftliche Alternative zum aufwändigen geometrischen Nivelllement.

Für die satellitengestützte Gebrauchshöhenbestimmung auf dem Gebiet der Bundesrepublik Deutschland ist unter anderem das Quasigeoidmodell GCG05 (German Combined QuasiGeoid 2005) verfügbar, das Höhenanomalien  $\zeta$  bereitstellt. Das GCG05 stellt die offizielle Höhenreferenzfläche der AdV (Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen der Länder) dar und basiert im Wesentlichen auf Schwereanomalien und auf GPS-Nivellementspunkten, also Stationen, an denen sowohl ellipsoidische Höhen als auch Normalhöhen vorliegen und damit die Quasigeoidhöhen bekannt sind. Es wurde als Kombination von zwei unabhängigen Modellen des BKG (Bundesamt für Kartographie und Geodäsie) und des IfE (Institut für Erdmessung, Leibniz Universität Hannover) berechnet. Die Genauigkeit der GCG05-Quasigeoidhöhen  $\zeta$  wird mit 1–2 cm angegeben (BKG 2005, Liebsch et al. 2006).

Eine wichtige Aufgabe, die mit der satellitengestützten Bestimmung von Gebrauchshöhen verbunden ist, stellt die Qualitätskontrolle des zu Grunde liegenden Quasigeoidmodells mit Hilfe von *unabhängigen* Vergleichsdaten dar. Hierfür eignen sich einerseits GPS-Nivellementspunkte, die nicht in die Quasigeoidmodellierung eingeflossen sind, und andererseits das *astronomische Nivelllement*. Bei diesem von Helmert (1884) entwickelten astrogeodätischen Verfahren der Schwerkraftbestimmung werden Lotabweichungen längs eines Verbindungsweges zwischen zwei oder mehreren Punkten integriert, um

die Änderung der Geoid- und Quasigeoidhöhen zu bestimmen.

In den letzten Jahren wurden an der Eidgenössisch-Technischen Hochschule (ETH) Zürich und an der Leibniz Universität Hannover digitale, echtzeitfähige Zenitkamerasysteme für die vollautomatisierte hochgenaue Lotabweichungsmessung entwickelt und erfolgreich erprobt (Hirt und Bürgi 2002, Buerki et al. 2004, Hirt 2004). Die Leistungsfähigkeit der Lotabweichungsmessung mit digitalen Zenitkamerasystemen (Abschnitt 2) hat seit 2004 zu einer verstärkten Anwendung des astronomischen Nivellements zur hochgenauen profilierten Schwerefeldbestimmung geführt, die unter anderem zur Validierung gravimetrischer Quasigeoidmodelle angewendet wurde.

Das Hannoversche digitale Zenitkamerasystem TZK2-D wurde in Niedersachsen (Testgebiete Benthe und Steinhude) und Bayern (Testgebiet Isartal) zur Messung hochgenauer und dichter Lotabweichungsdatensätze entlang von Profilen eingesetzt. Dabei konnten Stationsabstände zwischen 50 m (Testgebiet Steinhude, Hirt und Seeber 2006) und einigen 100 m (Testgebiet Benthe, Hirt 2004 sowie Testgebiet Isartal, Hirt et al. 2006, Hirt und Flury 2007) über Profilängen von bis zu 20 km realisiert werden. Je nach Stationsabstand und Profilänge wurden mit dem astronomischen Nivelllement Genauigkeiten im Millimeter- und Submillimeterbereich für den Quasigeoidverlauf erreicht (Hirt und Seeber 2006, Hirt und Flury 2007). Über einige 100 km kann das astronomische Nivelllement bei Stationsabständen von einigen km für die Bestimmung von Quasigeoidprofilen auf dem cm-Genauigkeitsniveau angewendet werden (Voigt et al. 2007). Die durchgeföhrten Studien haben gezeigt, dass die lokale profilweise astrogeodätische Schwerefeldbestimmung mit digitalen Zenitkamerasystemen aufgrund der erreichbaren übergeordneten Genauigkeiten und der Unabhängigkeit der Messgröße »Lotabweichung« von anderen Schwerefeldgrößen ein geeignetes Verfahren zur Überprüfung gravimetrischer Quasigeoidmodelle ist.

Der vorliegende Beitrag beschäftigt sich mit der hochpräzisen Bestimmung eines astrogeodätischen Quasigeoidprofils (Abschnitt 4) und dessen Nutzung für die Validierung des Quasigeoidmodells GCG05 (Abschnitt 5). Hierfür wurden mit dem digitalen Zenitkamerasystem TZK2-D Lotabweichungsmessungen im Abstand von etwa 600 m entlang einer 63 km langen Traverse durchgeführt, die den Harz vollständig überquert und eine Höhenvariation von über 700 m aufweist (Abschnitt 3). Das ausgewählte Testgebiet Harz hat historischen Charakter. Hier wurde das astronomische Nivelllement erstmalig zur Geoidbestimmung angewendet (Helmert 1913, Galle 1914) sowie in zahlreichen weiteren Arbeiten im Rahmen des »Testnetzes Westharz« am IfE untersucht und weiterentwickelt (z.B. Campbell 1971, Boedecker 1976 sowie Torge 1977).

## 2 Das digitale Zenitkamerasystem TZK2-D

Das für die vorliegende Studie eingesetzte digitale Zenitkamerasystem TZK2-D (Transportable Zenitkamera 2 – Digitalsystem) wurde am IfE (Leibniz Universität Hannover) für die automatische Bestimmung der physikalischen Lotrichtung und Lotabweichung in Echtzeit entwickelt. Das astrogeodätische Messsystem TZK2-D setzt sich aus einem GPS-Empfänger zur Messung der geodätischen (ellipsoidischen) Koordinaten (Breite  $\varphi$  und Länge  $\lambda$ ) und einer digitalen Zenitkamera – ein mit CCD-Sensorik ausgestattetes Teleskop – für die Bestimmung der physikalischen Lotrichtung zusammen. Diese ist durch die astronomischen Koordinaten (Breite  $\Phi$  und Länge  $\Lambda$ ) definiert. Die Lotabweichungskomponenten

$$\xi = \Phi - \varphi \quad \eta = (\Lambda - \lambda) \cos \varphi \quad (2)$$

ergeben sich als Differenz zwischen astronomischen und ellipsoidischen Koordinaten. Die Komponente  $\xi$  gibt die Abweichung der physikalischen Lotrichtung von der Ellipsoidnormalen in Nord-Süd-Richtung und  $\eta$  in Ost-West-Richtung an. Nachfolgend wird die Zenitkameramessung und die Datenauswertung vereinfacht beschrieben; für eine ausführliche Darstellung wird auf die Veröffentlichung von Hirt und Seeber (2002) in dieser Zeitschrift und die Dissertation von Hirt (2004) verwiesen.

Vor der Messung der astronomischen Breite  $\Phi$  und Länge  $\Lambda$  wird das digitale Zenitkamerasystem TZK2-D mit Hilfe eines motorisierten Stativs und hochgenauer Neigungssensoren horizontiert. Während der Messung wird das zenithnahe Sternfeld auf dem CCD-Sensor abgebildet, die Zeitpunkte der Belichtungen mit dem GPS-Empfänger erfasst und die Restneigung der Kamera gegenüber der Lotrichtung mit den Neigungssensoren für die rechnerische Korrektion registriert. Die Messung erfolgt in zwei Lagen zur Beherrschung der Nullpunktabweichungen von CCD- und Neigungssensorik.

Eine digitale Aufnahme des zenithnahen Sternfeldes enthält – je nach fotografiertem Himmelsregion – durchschnittlich einige 10 bis 100 Sterne, die für die Berechnung der Lotrichtung ( $\Phi, \Lambda$ ) verwendet werden. Die in den CCD-Aufnahmen abgebildeten Sterne werden mit Verfahren der digitalen Bildverarbeitung in den Zenitaufnahmen detektiert und deren Positionen ausgemessen (z.B. Hirt 2001). Die ermittelten Bildkoordinaten der Sterne werden mit Hilfe von Referenzsternen, die die Funktion von Anschlusspunkten erfüllen und den Sternkatalogen Tycho-2 (Høg et al. 2000) oder UCAC (US Naval Observatory CCD Astrograph Catalog, Zacharias et al. 2004) entnommen werden, identifiziert und mit einem geeigneten Transformationsansatz reduziert. In das astrometrisch reduzierte Sternfeld wird die Zenitrichtung interpoliert, die nach dem Anbringen kleinerer Korrekturen (wegen Stehachsneigung und Polbewegung) der gesuchten Lotrichtung ( $\Phi, \Lambda$ ) entspricht. Die Lotabweichungen ( $\xi, \eta$ ) ergeben sich durch Berücksichtigung der

geodätischen Koordinaten  $(\varphi, \lambda)$  der Lotabweichungsstation, Gl. (2).

Die Durchführung und Auswertung einer Lotabweichungseinzelmessung  $(\xi, \eta)$  nimmt mit dem Zenitkamerasytem TZK2-D etwa 30s in Anspruch. Die Genauigkeit der Einzelwerte beträgt üblicherweise  $0.^{\circ}2 - 0.^{\circ}3$  (Hirt 2004, Hirt und Seeber 2007). Auf den Lotabweichungsstationen werden grundsätzlich Wiederholungsmessungen durchgeführt, um den Einfluss der Atmosphäre (Refraktion, Szintillation) auf die gemessenen Sternkoordinaten zu mindern und die Genauigkeit der Lotrichtungs- und Lotabweichungsmessung durch Mittelwertbildung zu steigern. Bei einer Beobachtungs- und Auswertedauer von insgesamt 20 min können 50 Einzelwerte der Lotabweichung mit der TZK2-D bestimmt werden, so dass einige 1000 Sterne für die Lotabweichungsberechnung zur Verfügung stehen. Die Genauigkeit der resultierenden Mittelwerte der Lotabweichung beträgt etwa  $0.^{\circ}08$  (Hirt und Seeber 2006, 2007).

### 3 Lotabweichungsmessungen im Harz

Im Zeitraum von Juni bis September 2006 wurde das digitale Zenitkamerasytem TZK2-D für die Messung eines dichten Lotabweichungsdatensatzes im Harz eingesetzt. Auf einer Länge von 63.4 km wurden 114 Lotabweichungsstationen profilhaft angeordnet. Das Lotabweichungsprofil verläuft von Beuchte nach Bad Harzburg, Torfhaus, entlang dem Oderstausee über Bad Lauterberg bis Herzberg (Abb. 1). Es überquert den Harz vollständig in Nord-Süd-Richtung und deckt einen Höhenbereich zwischen 110 m und 825 m über Normalhöhennull (NHN) ab. Die Lotabweichungsstationen wurden im durchschnittlichen Abstand von etwa 550–650 m entlang einer Nivellementsleitung 1. Ordnung angeordnet. Am Profilanfang (Profilteil nördlich von Bad Harzburg) haben die Stationen etwas größere Abstände von etwa 1 km. Besonders enge Stationsabstände von etwa 50 m wurden – zu

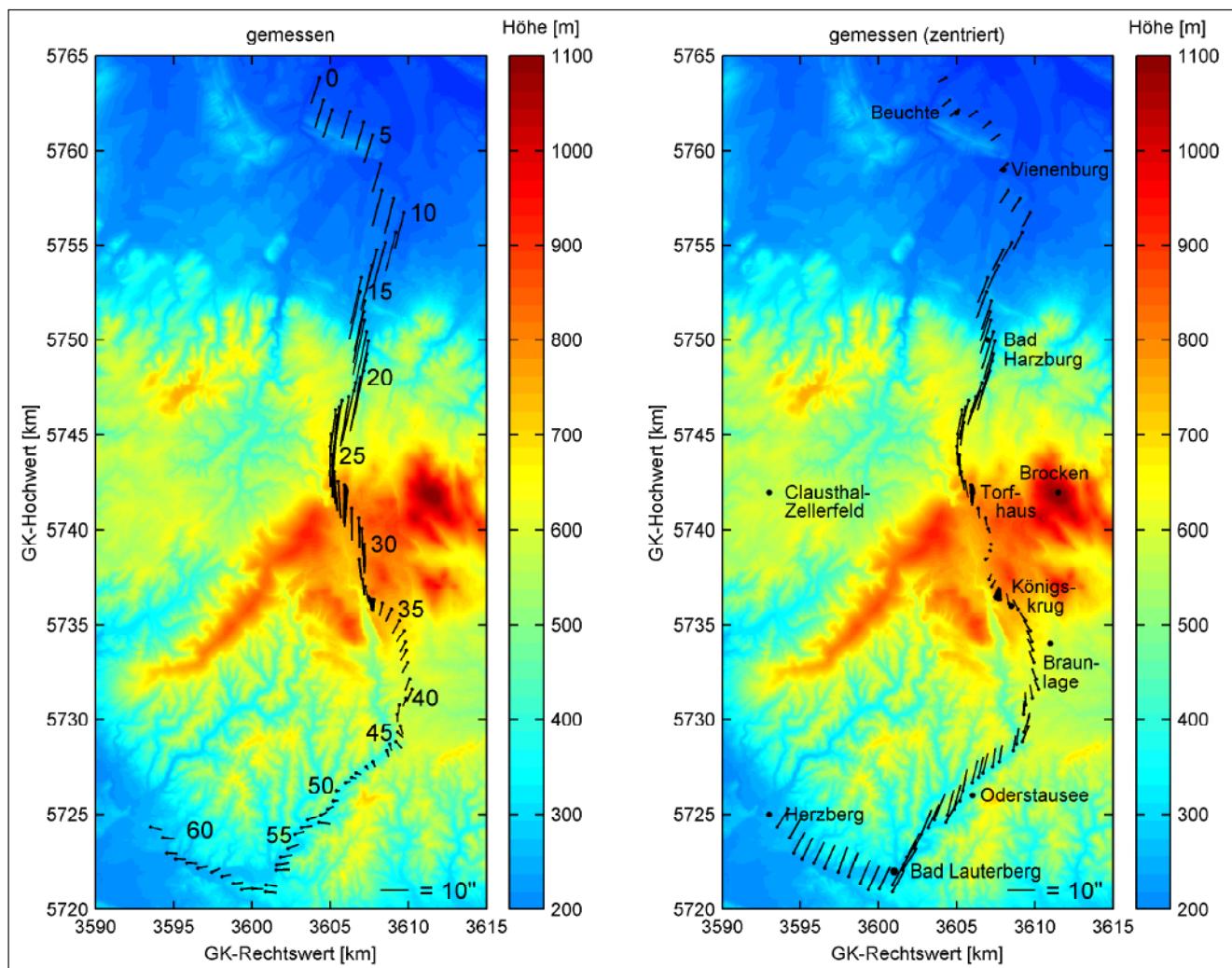


Abb. 1: Lotabweichungen im Harz in vektorieller Darstellung. Die linke Seite zeigt die gemessenen Lotabweichungen, die am Harznordrand Beträge über  $20''$  annehmen und zu den topographischen Massen des Oberharzes abgelenkt werden. Auf der linken Seite ist die Kilometrierung angegeben. Die rechte Seite zeigt das Lotabweichungsfeld nach Zentrierung auf den Mittelwert, d.h. nach der Entfernung langwelliger Anteile. Sowohl am Nord- als auch Südrand des Harzes zeigen die Vektoren zum Oberharz und damit ein gegenläufiges Verhalten. Im Oberharz verschwindet die Lotabweichung nahezu vollständig.

**Tab. 1: Statistik der Lotabweichungsdoppelmessungen auf 39 Stationen im Harz.** Der Statistik liegen die Differenzen zwischen Lotabweichungen zu Grunde, die in jeweils zwei unterschiedlichen Nächten mit 20 minütigen Beobachtungen bestimmt wurden.

| Komponente | Min ["] | Max ["] | Mittel ["] | Stabw. ["] |
|------------|---------|---------|------------|------------|
| $\xi$      | 0.270   | -0.248  | -0.015     | 0.081      |
| $\eta$     | 0.321   | -0.201  | 0.028      | 0.090      |

**Tab. 2: Statistik der Lotabweichungen auf 114 Stationen im Harz, Angaben in Bogensekunden**

| Komponente | Min    | Max    | Max-Min | Mittel |
|------------|--------|--------|---------|--------|
| $\xi$      | -1.365 | 20.864 | 22.229  | 7.658  |
| $\eta$     | -4.789 | 4.515  | 9.304   | 0.260  |

Analysezwecken – in Torfhaus und bei Königskrug über Teilstrecken von jeweils 300–400 m umgesetzt.

Die geodätischen Koordinaten ( $\varphi, \lambda$ ) der Lotabweichungsstationen wurden mit präzisem differentiellen GPS unter Nutzung des SAPOS-HEPS (Satellitenpositionierungsdienst der deutschen Landesvermessung, Hochpräziser Echzeitpositionierungsservice, SAPOS 2007) auf dem Genauigkeitsniveau von wenigen Zentimetern (dies entspricht vom Erdzentrum aus gesehen einem Zentriwinkel von etwa 0".001) bestimmt und sind auf das Referenzsystem ETRS89 bezogen. Auf einigen Stationen waren aufgrund starker Abschattungen keine zuverlässigen GPS-Lösungen möglich; hier wurden die geodätischen Koordinaten durch Polygonierung ermittelt.

In den meisten durchgehend klaren Nächten konnten mit dem Zenitkamerasystem TZK2-D jeweils zwischen 8 und 12 Lotabweichungsstationen bestimmt werden. Auf jeder Station wurden etwa 50 Einzelmessungen durchgeführt. Um die Genauigkeit der Lotabweichungsdaten abschätzen zu können, wurden 39 Stationen des Profils jeweils in zwei Nächten mit der TZK2-D eingemessen. Die aus den Doppelmessungen berechnete Standardabweichung (der Aufstellung an einem einzelnen Abend) beträgt 0".081 für die Lotabweichungskomponente  $\xi$  und 0".090 für  $\eta$  (Tab. 1). Diese Werte bestätigen die Genauigkeit für die Lotabweichungsmessung mit dem digitalen Zenitkamerasystem TZK2-D, die im Rahmen anderer Messkampagnen ermittelt wurde (z.B. Hirt und Seeber 2006, Hirt et al. 2006). Die gemessenen Lotabweichungen sind in vektorieller Form in Abb. 1 dargestellt. Die zugehörige Statistik (Tab. 2) zeigt die starken Variationen des Lotabweichungsfeldes im Harz, die über 22" in der Nord-Süd-Komponente  $\xi$  erreicht.

#### 4 Astrogeodätische Quasigeoidbestimmung

Die astrogeodätische Quasigeoidberechnung erfolgt mit dem klassischen Verfahren des astronomischen Nivellements (z.B. Helmert 1884, Band 1, S. 565; Niethammer 1939, Torge 2003, S. 267). Ausgehend von der Lotabweichungskomponente

$$\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha , \quad (3)$$

die im Beobachtungspunkt die Neigung der Niveaumöglichkeit (gegenüber dem Ellipsoid) in Richtung des Azimuts  $\alpha$  angibt, kann die Änderung der Quasigeoidhöhe

$$\Delta \zeta = -\varepsilon ds - E^N \quad (4)$$

entlang der Strecke  $ds$  bestimmt werden. Das Azimut  $\alpha$  und die Strecke  $ds$  werden dabei aus den geodätischen Koordinaten des Stand- und Zielpunktes berechnet. Der Verlauf der Quasigeoidhöhen zwischen Profilanfang 1 und -ende  $n$  ergibt sich durch Integration der Lotabweichungen entlang des Profils

$$\Delta \zeta_{1n} = - \int_1^n \varepsilon ds - E_{1n}^N , \quad (5)$$

wobei  $E^N$  bzw.  $E_{1n}^N$  die normale Korrektion bezeichnet (Abschnitt 4.3). Zur praktischen Berechnung von  $\Delta \zeta_{1n}$  wird das Wegintegral durch die Summe

$$\Delta \zeta_{1n} = - \sum_1^{n-1} \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}}{2} ds_{i,i+1} - E_{1n}^N \quad (6)$$

ersetzt. Die Anwendung von Gl. (6) setzt eine ausreichend dichte Verteilung der Lotabweichungen entlang des Profils voraus, so dass die arithmetische Mittelbildung zwischen den Lotabweichungen benachbarter Stationen  $i, i+1$  des Profils zu einem repräsentativen Wert für das Streckenstück  $ds$  führt.

Während Gl. (6) in vielen Gebieten im Flachland bei einem Abstand von einigen 100 m zwischen beobachteten Lotabweichungsstationen angewendet werden kann, ist dies im Mittelgebirge – wie dem Harz – trotz der vorliegenden, dichten Stationsanordnung nicht ohne Weiteres zulässig. Grund dafür ist die unregelmäßige Ausprägung des Lotabweichungsfeldes, die wesentlich von der Verteilung der topographischen Massen abhängt (z.B. Torge 2003).

Eine Lösung besteht in der Hinzunahme topographischer Daten für die Lotabweichungsinterpolation. Digitale Geländemodelle (DGM) enthalten Information über die kurzweligen Strukturen des Lotabweichungsfeldes und können für die Berechnung *topographischer Lotabweichungen* (Abschnitt 4.1) verwendet werden. Durch topographische Reduktion der gemessenen Oberflächenlotabweichungen wird das Lotabweichungsfeld geglättet, so dass Interpolationsmethoden zur Verdichtung angewendet werden können (Abschnitt 4.2). Diese

von Helmert (1901), S. 959 vorgeschlagene Variante des astronomischen Nivellements ist in der Literatur als *astronomisch-topographisches Nivellement* bekannt (z.B. Heitz 1967, 1968, Elmiger 1969, Bosch and Wolf 1974, Boedecker 1976, Hirt und Flury 2007) und wird nachfolgend angewendet.

#### 4.1 Topographische Lotabweichungen

Die Variation des Lotabweichungsfeldes ist zu einem Großteil auf die Verteilung der topographischen Massen zurückzuführen (z.B. Denker 1988, Torge 2003). Als topographische Lotabweichungen  $(\xi, \eta)_{top}$  bezeichnet man denjenigen Anteil, den die Topographie an den beobachteten Lotabweichungen  $(\xi, \eta)$  bewirkt. Für die Berechnung topographischer Lotabweichungen zerlegt man das Gelände üblicherweise in Elementarkörper, z.B. in rechtwinklige Quaderecken konstanter Dichte, wie sie direkt aus einem DGM entnommen werden können. Die horizontalen Anteile des Gravitationspotentials  $V_x$  und  $V_y$  eines einzelnen Quaders können mit geschlossenen Formeln berechnet werden (Nagy et al. 2000, 2002, Flury 2002):

$$\begin{aligned} V_x &= G\rho \left| \left. y \operatorname{arsinh} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z \operatorname{arsinh} \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right|_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2}, \right. \\ &\quad -x \arctan \frac{yz}{x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2}, \\ V_y &= G\rho \left| \left. z \operatorname{arsinh} \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}} + x \operatorname{arsinh} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right|_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2}, \right. \\ &\quad -y \arctan \frac{xz}{y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2}, \end{aligned} \quad (7)$$

wobei  $G$  die Gravitationskonstante,  $\rho$  die Gesteinsdichte ist und die Größen  $x_1, y_1, z_1$  und  $x_2, y_2, z_2$  die Koordinaten der Quaderecken relativ zum Berechnungspunkt angeben. Die horizontalen Anteile des Gravitationspotentials  $V_x^{top}$  und  $V_y^{top}$  des gesamten topographischen Modells ergeben sich durch Summierung über alle Quaderecken und die topographischen Lotabweichungen  $(\xi, \eta)_{top}$  durch Division mit der Normalschwere  $\gamma$ :

$$\xi_{top} = \frac{V_x^{top}}{\gamma} \quad \eta_{top} = \frac{V_y^{top}}{\gamma}. \quad (8)$$

Für die Berechnung der topographischen Lotabweichungen wurde ein hochauflösendes DGM, dem Geländedaten der Landesvermessungen von Niedersachsen, Sachsen-Anhalt und Thüringen zu Grunde liegen, verwendet. Das DGM (Abb. 2) hat eine horizontale Auflösung von 25 m und eine Höhengenauigkeit von besser als 1 m, was für die hochgenaue Berechnung topographischer Lotabweichungen vollständig ausreicht (Hirt und Flury 2007). Die räumliche Ausdehnung des Modells beträgt 60 km in Ost-

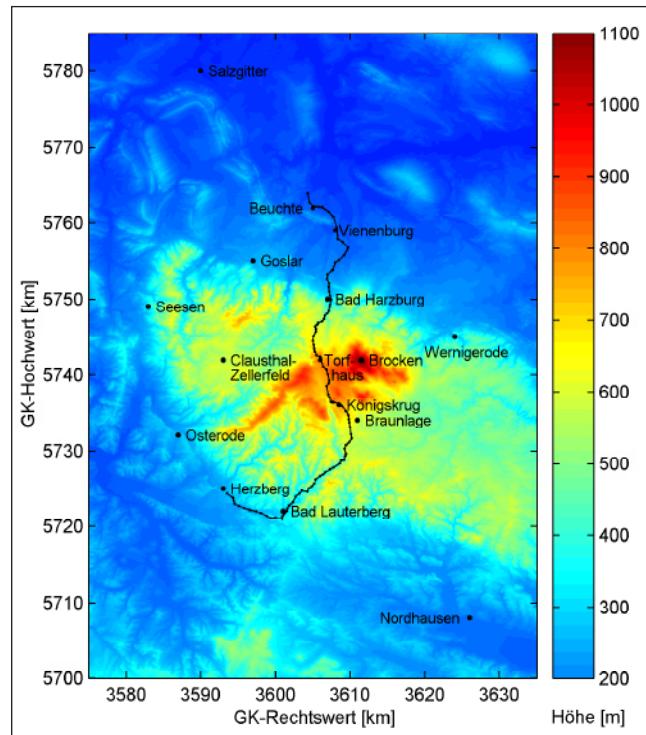


Abb. 2: Digitales Geländemodell vom Harz und Verlauf des Lotabweichungsprofils

West-Richtung und 85 km in Nord-Süd-Richtung, es umfasst insgesamt 8.2 Millionen Geländehöhen.

Der Ausschnitt wurde so gewählt, dass die Ränder des DGM mindestens 20 km Abstand zu jedem Punkt des Lotabweichungsprofils haben (vgl. Abb. 2). Hierdurch ist sichergestellt, dass die gravitative Wirkung aller Geländestrukturen in der Umgebung der Berechnungspunkte vollständig berücksichtigt wird. Durch den Abbruch an den DGM-Grenzen werden zwar die entfernten topographischen Massen bei der Berechnung der topographischen Lotabweichungen vernachlässigt, die fehlenden langwelligen Anteile an den topographischen Lotabweichungen sind jedoch für die Lotabweichungsinterpolation mit einer Remove-Restore-Technik (Abschnitt 4.2) unschädlich. Ab einer Entfernung von 5 km um den Berechnungspunkt wurde die horizontale DGM-Auflösung durch Mittelbildung der Geländehöhen auf 200 m – ohne spürbaren Genauigkeitsverlust bei der Berechnung der topographischen Lotabweichungen – reduziert, um den Berechnungsaufwand überschaubar zu halten.

Topographische Lotabweichungen  $(\xi, \eta)_{top}$  wurden an der Geländeoberfläche für alle 114 gemessenen Lotabweichungsstationen berechnet und zusätzlich für 2996 Zwischenpunkte, die im Abstand von etwa 20 m in das Profil eingerechnet wurden. Bei der Berechnung der Gravitationspotentiale wurde eine Einheitsdichte  $\rho$  von 2670 kg/m<sup>3</sup> (Gl. 7) angesetzt.

## 4.2 Kombination beobachteter und topographischer Lotabweichungen

Durch Anwendung einer Remove-Restore-Technik können die beobachteten Lotabweichungen  $(\xi, \eta)$  und topographischen Lotabweichungen  $(\xi, \eta)_{top}$  miteinander kombiniert werden, um ein dichtes, quasi-kontinuierliches Profil von Lotabweichungen an der Oberfläche zu erzeugen. Abb. 3a zeigt die 114 mit der Zenitkamera gemessenen Lotabweichungen  $(\xi, \eta)$  und die 3110 topographischen Lotabweichungen  $(\xi, \eta)_{top}$ , die für das Harzprofil berechnet wurden, Gl. (7) und (8). Die sichtbare, starke Korrelation zwischen den beiden Datensätzen zeigt den Einfluss der topographischen Massen auf die gemessenen

Lotabweichungen. Mit einer topographischen Reduktion (Remove-Schritt)

$$(\Delta\xi, \Delta\eta) = (\xi, \eta) - (\xi, \eta)_{top} \quad (9)$$

werden die gemessenen Lotabweichungen vom Einfluss der Topographie befreit (z. B. Heitz 1967, Bosch und Wolf 1974, Marti 1997). Man erhält einen deutlich glatteren Verlauf des Lotabweichungsfeldes (Abb. 3b).

Verbleibende langwellige Strukturen (z. B. Offsets) im topographisch reduzierten Lotabweichungsfeld  $(\Delta\xi, \Delta\eta)$  sind durch entfernte topographische Massen (außerhalb der Grenzen der verwendeten DGM-Daten), durch die isostatische Kompensation sowie andere nicht reduzierte

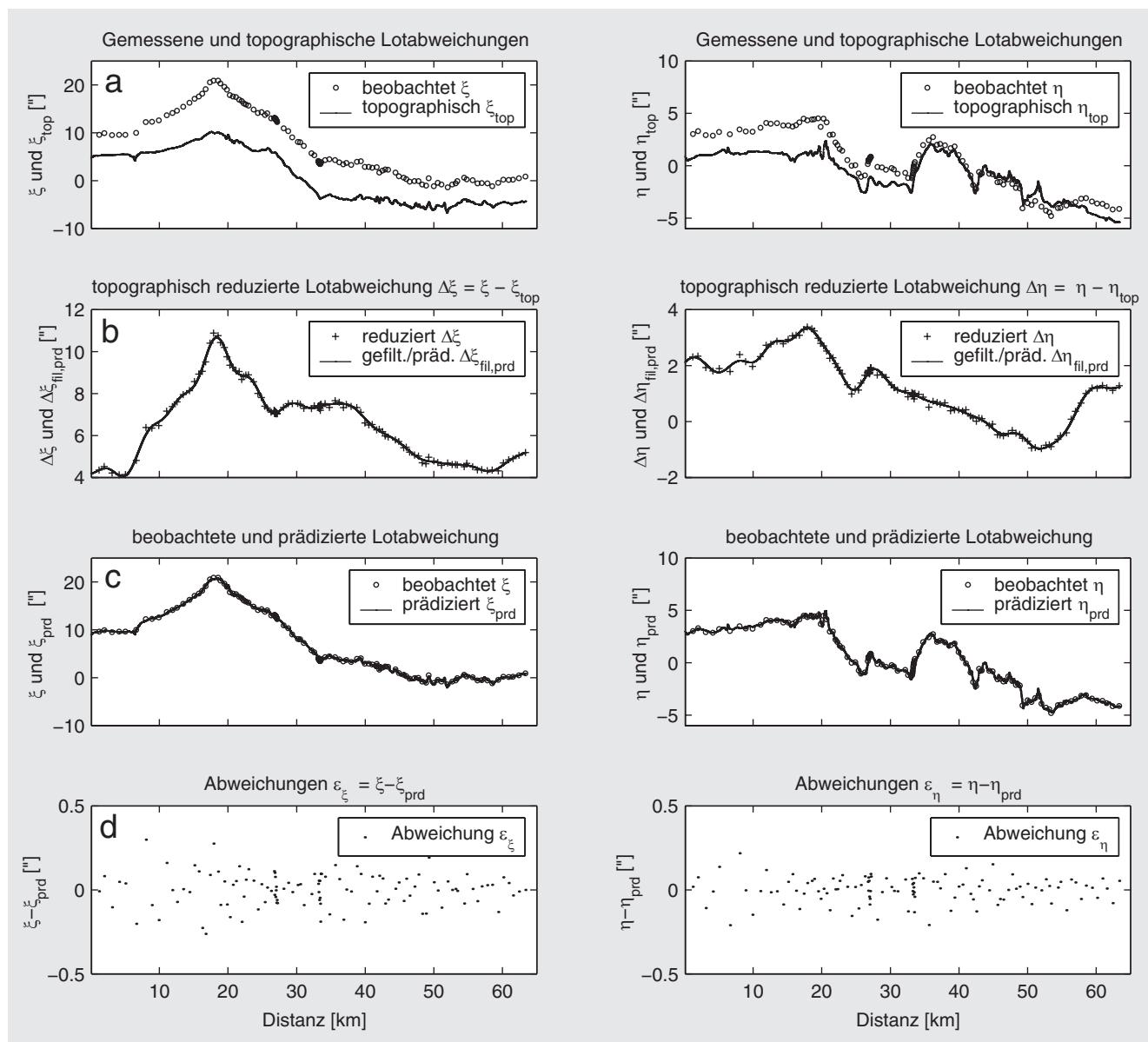


Abb. 3: Remove-Restore Technik zur Lotabweichungsinterpolation, links: Lotabweichungskomponente  $\xi$ , rechts: Lotabweichungskomponente  $\eta$ ; (a): beobachtete Lotabweichungen  $(\xi, \eta)$  und topographische Lotabweichungen  $(\xi, \eta)_{top}$ , (b): topographisch reduzierte Lotabweichungen  $(\Delta\xi, \Delta\eta)$  und prädizierte, topographisch reduzierte Lotabweichungen  $(\Delta\xi, \Delta\eta)_{prd}$ , (c): beobachtete Lotabweichungen  $(\xi, \eta)$  und prädizierte Lotabweichungen  $(\xi, \eta)_{prd}$  an der Oberfläche, (d): Abweichungen  $(\varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta)$  zwischen beobachteten und prädizierten Lotabweichungen

Schwerefeldanteile mit niedrigen Frequenzen verursacht. Die wellenähnlichen Strukturen mit Skalen im Bereich einiger Kilometer haben ihre Ursache in Dichteanomalien entlang des Profils. Gelegentliche Peaks mit einer Ausdehnung von weniger als einem Kilometer sind teilweise durch einen Wechsel im Azimut der Profilrichtung begründet (vgl. Hirt und Flury 2007).

Für die Filterung des topographisch reduzierten Lotabweichungsfeldes und die Interpolation (Prädiktion) von Lotabweichungen an Zwischenpunkten wird üblicherweise die Kollokation nach kleinsten Quadraten angewendet, die z.B. in Denker (1988) und Torge (2003) dargestellt ist und für das astronomisch-topographische Nivellement z.B. von Heitz (1967) sowie Hirt und Flury (2007) untersucht wurde. Das Ergebnis der Kollokation ist ein eng verdichtetes Feld von prädizierten, topographisch reduzierten Lotabweichungen ( $\Delta\xi, \Delta\eta$ )<sub>prd</sub> (Abb. 3b).

Als Alternative zur Kollokation wurde die einfache lineare Interpolation der topographisch reduzierten Lotabweichungen untersucht. Dieses Verfahren hat den Vorteil, dass durch azimutale Änderungen des Profilverlaufs verursachte Peaks vollständig als reales Signal erhalten bleiben und nicht – wie bei der Kollokation nach kleinsten Quadraten – abgeschwächt werden (vgl. Abb. 3b, Profilkilometer 6–10). Diesem Vorteil steht als Nachteil gegenüber, dass keine Filterung der verbleibenden zufälligen Fehleranteile erfolgt. Ein Vergleich zwischen der Kollokation und der linearen Interpolation im topographisch reduzierten Lotabweichungsfeld zeigte maximale Differenzen (zwischen den Quasigeoidberechnungen) von etwa 0.6 mm und einen RMS-Wert (root mean square, Wurzel aus den gemittelten Quadraten der Differenzen) von 0.23 mm. Von diesen geringen Unterschieden werden die Ergebnisse der Validierung in Abschnitt 5 nicht wesentlich beeinflusst.

Im Restore-Schritt wird der Einfluss der Topographie berücksichtigt, indem die topographischen Lotabweichungen ( $\xi, \eta$ )<sub>top</sub> an den 3110 Stationen zu den prädizierten Lotabweichungen ( $\Delta\xi, \Delta\eta$ )<sub>prd</sub> addiert werden:

$$(\xi, \eta)_{prd} = (\Delta\xi, \Delta\eta)_{prd} + (\xi, \eta)_{top}. \quad (10)$$

Man erhält einen quasi-kontinuierlichen Verlauf von prädizierten Oberflächenlotabweichungen der von Abb. 3c gezeigt wird und für die weitere Auswertung mit Gl. (6) geeignet ist. In Abb. 3d sind die Differenzen zwischen gemessenen und prädizierten Oberflächenlotabweichungen

$$(\epsilon_\xi, \epsilon_\eta) = (\xi, \eta) - (\xi, \eta)_{prd} \quad (11)$$

dargestellt, die die zufälligen Abweichungen der beobachteten und topographischen Lotabweichungen zeigen. Der RMS-Wert aus den Abweichungen beträgt etwa 0."1 für beide Lotabweichungskomponenten.

Der beschriebene Ansatz zur Kombination gemessener und topographischer Lotabweichungen wird in Abb. 4a-f verdeutlicht, die anhand der Verdichtungszone

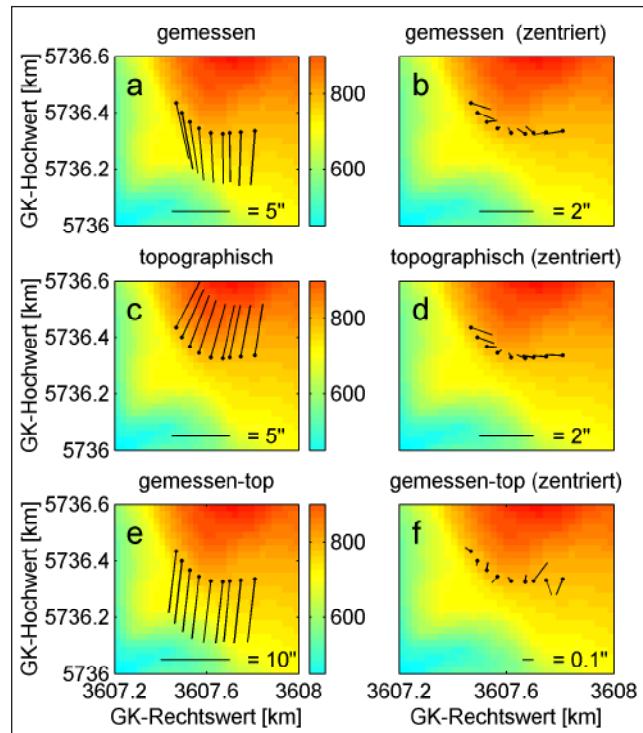


Abb. 4: Kombination beobachteter und topographischer Lotabweichungen in der Verdichtungszone Königskrug im Oberharz. Die Ausschnittsgröße beträgt 600 m × 800 m, die Höhenvariation etwa 300 m (siehe Farbskala). Links: unzentrierte Lotabweichungen, rechts: auf den jeweiligen Mittelwert zentrierte Lotabweichungen. Obere Reihe: beobachtete Lotabweichungen ( $\xi, \eta$ ), mittlere Reihe: topographische Lotabweichungen ( $\xi, \eta$ )<sub>top</sub>, untere Reihe: topographisch reduzierte Lotabweichungen ( $\Delta\xi, \Delta\eta$ )

Königskrug (Stationsabstand 50 m) die beobachteten, topographischen und topographisch reduzierten Lotabweichungen in vektorieller Darstellung zeigt. Die beobachteten (a) und topographischen Lotabweichungen (c) zeigen in der Differenz – dem topographisch reduzierten Lotabweichungsfeld (e) – nahezu gleiche Richtungen und Beträge. Man erkennt die glättende Wirkung der topographischen Reduktion. Nach der Zentrierung der beobachteten und topographischen Lotabweichungen auf den jeweiligen Mittelwert (b und d) zeigen die Vektoren in nahezu gleicher Weise die gravitative Wirkung eines nahen Bergrückens an. Die starke Korrelation zeigt die Sensitivität der Lotabweichung für die Topographie.

Die erreichte hohe Qualität der Kombination aus gemessenen und topographischen Lotabweichungen wird abschließend von den Differenzen zwischen (b) und (d) verdeutlicht, deren Beträge etwa 0."05 bis 0."15 erreichen (f). Die Residuen spiegeln hauptsächlich die Unsicherheiten der astrogeodätischen Messung sowie der topographischen Lotabweichungen wider und zeigen, dass keine signifikanten Fehler bei der Berechnung topographischer Lotabweichungen gemacht wurden.

### 4.3 Normale Korrektion

Zur strengen Transformation der integrierten Oberflächenlotabweichungen in Quasigeoidhöhendifferenzen muss die normale Korrektion  $E_{1n}^N$  angebracht werden. Die normale Korrektion ist in der Literatur auch als normale Höhenreduktion bekannt, mit der nivellierte Höhenunterschiede in das Normalhöhensystem überführt werden (Torge 2003, S. 228):

$$E_{1n}^N = \int_1^n \frac{g - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} dn + \frac{\bar{\gamma}_1 - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} H_1 - \frac{\bar{\gamma}_n - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} H_n . \quad (12)$$

Der Korrektionsterm  $E_{1n}^N$  trägt der Nichtparallelität der Äquipotenzialflächen des Erdschwerefeldes Rechnung. Für die Berechnung von  $E_{1n}^N$  müssen auf der ersten und letzten Station die mittleren Normalschweregewerte  $\bar{\gamma}_1$ ,  $\bar{\gamma}_n$  entlang der Lotlinie berechnet werden sowie der konstante Schwerewert  $\gamma_0^{45}$  (siehe hierzu Torge 2003, S. 98). Die Höhen (über NHN) des ersten und letzten Profil-

punktes  $H_1$ ,  $H_n$  und die Höhendifferenzen  $dn$  zwischen benachbarten Profilpunkten können aus DGM-Höhendaten interpoliert werden. Die benötigten Oberflächenschweregewerte  $g$  entlang des Profils können auf Grundlage von Schweredatenbanken mit ausreichender Genauigkeit prädiziert werden.

Zur Berechnung der normalen Korrektion  $E_{1n}^N$  für das Harzprofil wurden Oberflächenschweregewerte  $g$  auf Grundlage des Schwerinformationssystems SIS (PTB 2007) der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt PTB (Braunschweig) und des IfE verwendet. Die mit dem SIS berechneten Oberflächenschweregewerte  $g$  basieren auf digitalisierten Bougueranomalienkarten. Abb. 5 zeigt den Verlauf der Geländehöhen  $H$  entlang des Profils (interpoliert aus dem DGM) sowie den Verlauf der prädizierten Oberflächenschweregewerte  $g$ . Im unteren Teil der Abb. 5 ist der Verlauf der normalen Korrektion  $E_{1n}^N$  dargestellt. Im Bereich des Oberharzes erreicht  $E_{1n}^N$  maximale Werte von etwa 4 cm. Man erkennt deutlich die starke positive Korrelation zwischen der normalen Korrektion  $E_{1n}^N$  und

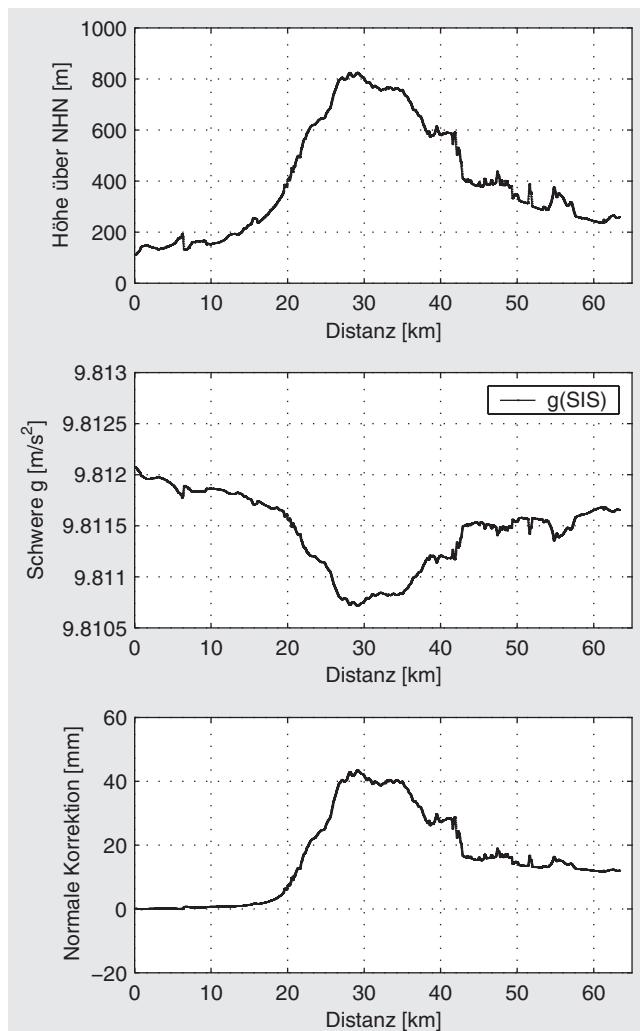


Abb. 5: Oben: Höhenprofil, Mitte: Verlauf der Oberflächenschweregewerte  $g$  (SIS), unten: Normale Korrektion  $E_{1n}^N$  (SIS)

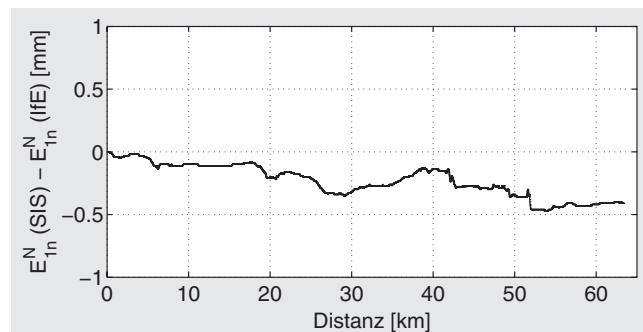


Abb. 6: Differenz zwischen  $E_{1n}^N$  (SIS) und  $E_{1n}^N$  (IfE)

der Höhe  $H$  sowie die negative Korrelation zwischen  $E_{1n}^N$  und der Oberflächenschwere  $g$ .

Für die unabhängige Überprüfung der  $E_{1n}^N$ -Berechnung wurden Oberflächenschweregewerte  $g$  auf Grundlage der IfE-Schweredatenbank prädiziert. Es zeigten sich maximale Differenzen zwischen den prädizierten Oberflächenschwerewerten  $g$  (SIS) und  $g$  (IfE) von 2.50 mgal bei einem RMS-Wert aus Differenzen von 0.88 mgal. Die IfE-Schwereprädiktionen wurden ebenfalls zur Berechnung der normalen Korrektion  $E_{1n}^N$  verwendet. Die Differenzen zwischen  $E_{1n}^N$  (SIS) und  $E_{1n}^N$  (IfE) sind in Abb. 6 dargestellt. Die Genauigkeit der normalen Korrektion lässt sich aus der Differenz zwischen den beiden unabhängigen Berechnungen  $E_{1n}^N$  (SIS) und  $E_{1n}^N$  (IfE) abschätzen. Es zeigen sich maximale Differenzen von weniger als 0.5 mm und ein RMS-Wert von 0.27 mm. Für die weiteren Berechnungen wird das arithmetische Mittel aus  $E_{1n}^N$  (SIS) und  $E_{1n}^N$  (IfE) verwendet. Die Unsicherheit der normalen Korrektion liegt damit auf dem Niveau von etwa 0.2 mm und spielt keine weitere Rolle im Fehlerhaushalt des astrogeodätischen Quasigeoidprofils.

#### 4.4 Das astrogeodätische Quasigeoidprofil

Das astrogeodätische Quasigeoidprofil  $\Delta\zeta_{1n}$  ergibt sich, indem das Helmertsche Wegintegral (Gl. 6) mit den quasikontinuierlich vorliegenden, prädizierten Oberflächenlotabweichungen  $(\xi, \eta)_{prd}$  (Gl. 10) ausgewertet und die normale Korrektion  $E_{1n}^N$  (Gl. 12) angebracht wird. Das Ergebnis der Berechnungen ist in Abb. 7 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass sich die Quasigeoidhöhen zwischen Harznordrand und Oberharz um etwa 1.8 m ändern.

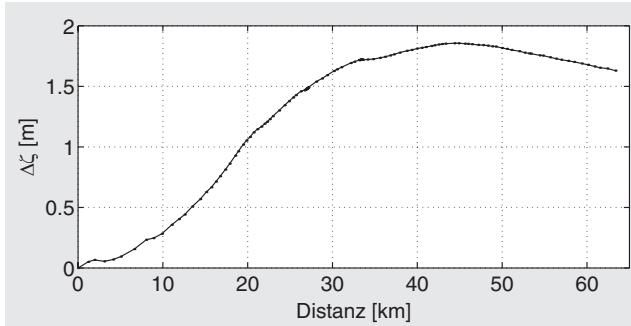


Abb. 7: Astrogeodätisches Quasigeoidprofil im Harz

#### 4.5 Genauigkeitsanalyse

Der verwendete Lotabweichungsdatensatz besteht aus 114 gemessenen Oberflächenlotabweichungen, die in einem recht dichten durchschnittlichen Abstand von etwa 600 m angeordnet worden sind. Dieser Datensatz kann in zwei Subprofile zerlegt werden, indem die Lotabweichungsstationen mit geraden Punktnummern dem ersten Subprofil und Stationen mit ungeraden Nummern dem zweiten Subprofil zugeordnet werden. Bis auf die erste und letzte Station (die beiden Subprofilen zugeordnet werden) sind die beiden Mengen der resultierenden Lotabweichungsstationen zu einander disjunkt. Auf diese Weise entstehen zwei Profile mit je 58 Stationen und Abständen von etwa 1.2 km, die zwei voneinander unabhängige Quasigeoidberechnungen erlauben. Die sich ergebenen Quasigeoidprofile haben als gemeinsame Punkte mit gleichen Lagekoordinaten den ersten und letzten Profilpunkt sowie eine Reihe von Kreuzungspunkten, an denen sich die Verläufe in der Örtlichkeit überschneiden (Abb. 8). An den Kreuzungspunkten, die über Verfahren der Geradschnittberechnung extrahierbar sind, können die Quasigeoidhöhen verglichen und Aussagen zur Genauigkeit getroffen werden.

Entlang der beiden Subprofilverläufe wurden – in Abständen von 20 m – unabhängig voneinander topographische Lotabweichungen  $(\xi, \eta)_{top}$ , Geländehöhen  $H$  und Oberflächenschwerewerte  $g$  berechnet. Diese Datensätze wurden mit dem beschriebenen Formalismus des astro-nomisch-topographischen Nivellements (Abschnitte 4.1 bis 4.3) separat ausgewertet und für die Berechnung zweier Quasigeoidprofile (Gl. 6) verwendet. Auf diese Weise wird eine größtmögliche Unabhängigkeit der beiden resultie-

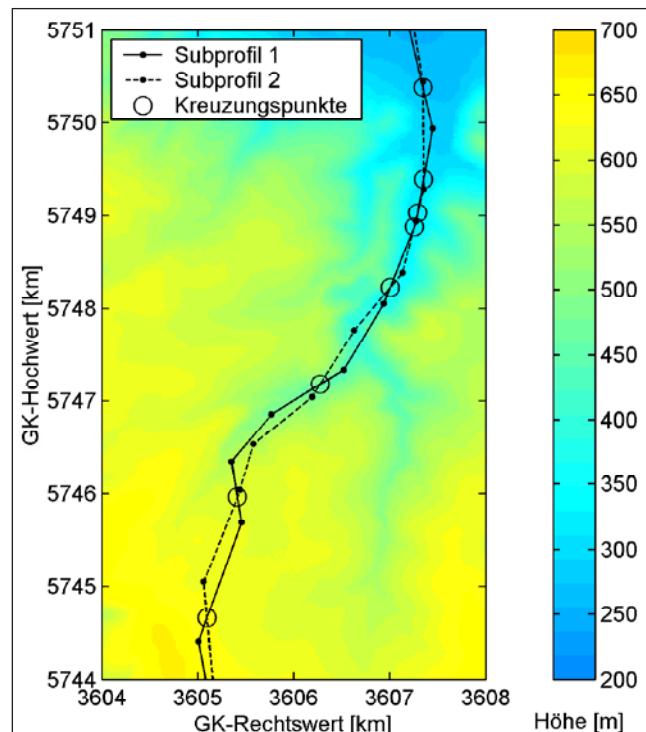


Abb. 8: Verlauf der beiden Subprofile am Harznordrand und ihre Kreuzungspunkte

renden Lösungen erreicht. Die an den Kreuzungspunkten aufgetretenen Differenzen sind in Abb. 9 dargestellt; die zugehörige Statistik ist in Tab. 3 zusammengestellt. Die Grafik zeigt, wie sich die (zufälligen) Fehleranteile der Lotabweichungsmessung und die Fehleranteile aufgrund der Vernachlässigung feiner Schwerefeldsignale durch die Integration entlang der Profile akkumulieren. Die Differenzen variieren in einem Bereich von etwa 4 mm

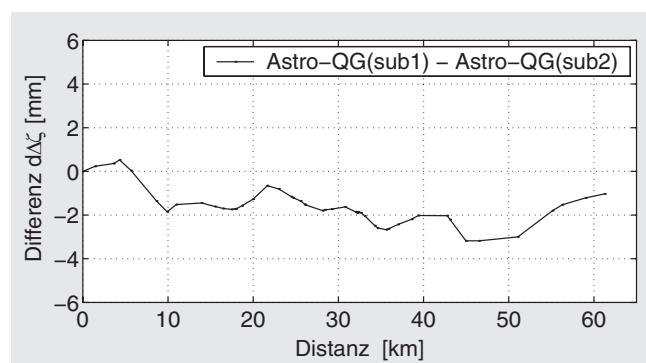


Abb. 9: Vergleich der beiden Subprofile

Tab. 3: Statistik des Vergleiches zwischen den astrogeodätischen Subprofilen 1 und 2 aus Differenzen an 53 Kreuzungspunkten. RMS = Wurzel aus den gemittelten Quadraten der Differenzen, Stabw = RMS/√2, Angaben in mm

| Vergleich   | Min  | Max | Mittel | RMS | Stabw. |
|-------------|------|-----|--------|-----|--------|
| Sub1 - Sub2 | -3.2 | 0.5 | -1.6   | 1.8 | 1.3    |

und der RMS-Wert beträgt 1.8 mm. Da die Differenzen die Fehleranteile beider Berechnungen widerspiegeln, ergibt sich nach den Regeln der Kovarianzfortpflanzung als Standardabweichung der Quasigeoidhöhen eines einzelnen Subprofils ein um  $\sqrt{2}$  niedrigerer Wert von etwa 1.3 mm. Es kann angenommen werden, dass die aus allen 114 Lotabweichungsstationen berechnete Lösung noch etwas genauer ist, da das Lotabweichungsfeld durch die engere Stationsanordnung (600 m statt 1200 m) dichter abgetastet wurde und der Einfluss der Signalvernachlässigung dadurch verringert ist. Anhand dieser Abschätzungen wird das übergeordnete Genauigkeitsniveau der vorliegenden astrogeodätischen Quasigeoidbestimmung deutlich.

Als weitere Möglichkeit der Genauigkeitsabschätzung kann das *Varianzfortpflanzungsgesetz des astronomisch-topographischen Nivellements* angewendet werden, das in Hirt und Flury (2007) empirisch abgeleitet wurde. Für eine Profillänge von 65 km und Abstände der Lotabweichungsstationen von 600 m und 1200 m ergeben sich Standardabweichungen für den Quasigeoidhöhenunterschied  $\Delta\zeta$  von 1.3 mm und 2.2 mm. Diese Werte bestätigen die vorgenommenen Abschätzungen.

Die bisherigen Genauigkeitsabschätzungen decken im Wesentlichen den Einfluss der zufälligen Messabweichungen der Lotabweichungen ab. Die *systematischen Fehlerquellen* müssen wegen ihrer ungünstigen Fortpflanzung bei Integrationstechniken – wie dem astronomischen Nivelllement – besonders sorgfältig betrachtet werden. Zu diskutieren sind systematische Abweichungen in den Sternpositionen, instrumentell bedingte Systematiken sowie der Einfluss von Refraktionsanomalien auf die Lotabweichungsmessung.

Im Vergleich zwischen den Sternpositionen der Kataloge Tycho-2 und UCAC wurden systematische, wellenähnliche Abweichungen mit Amplituden von bis zu 0"01 entdeckt, die dem UCAC-Katalog zugeordnet wurden (Zacharias et al. 2000). Eine solche systematische Winkelabweichung kann gemäß Bogenformel zu einer maximalen Abweichung der Quasigeoidhöhen von etwa 3.3 mm über eine Distanz von 65 km führen. Die Lotabweichungsdaten, die im Harz mit dem Zenitkamerasystem TZK2-D gemessen wurden, sind sowohl mit Tycho-2, als auch mit dem UCAC-Sternpositionen ausgewertet worden. Aus den beiden resultierenden Lotabweichungsdatensätzen ergeben sich zwei verschiedene Quasigeoidprofile, deren Differenz (Abb. 10) den Einfluss der systematischen Fehler der UCAC-Sternposition auf die Quasigeoidberechnung im Harz widerspiegelt.

Es zeigen sich ein RMS-Wert von 0.25 mm sowie Abweichungen mit maximalen Amplituden von 0.5 mm. Offenbar sind die zenitnahen Sternfelder aus dem UCAC-Katalog, die während der astrogeodätischen Messkampagne für die Zenitkameramessungen im Harz nutzbar waren, nur geringfügig verfälscht. Für alle astrogeodätischen Quasigeoidberechnungen in diesem Beitrag wurden die Mittelwerte der mit Tycho-2 und UCAC berechneten Lot-

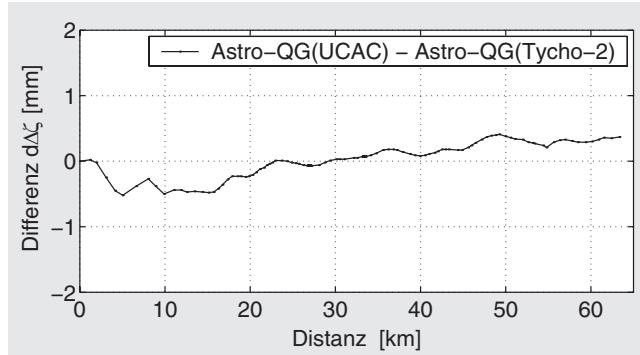


Abb. 10: Differenzen der Quasigeoidprofile QG(UCAC) und QG(Tycho-2)

abweichungen verwendet; verbleibende Auswirkungen auf das Quasigeoid können daher mit 0.1–0.2 mm abgeschätzt werden.

Während der astrogeodätischen Messkampagne im Harz wurde die instrumentelle Stabilität des Zenitkamerasystems TZK2-D durch regelmäßige Vergleichsbeobachtungen in Hannover kontrolliert (vgl. Hirt und Seeger 2007). Darüber hinaus wurde das Zenitkamerasystem TZK2-D auf verschiedenen Stationen in Deutschland und in der Schweiz für Vergleichsmessungen eingesetzt, auf denen unabhängige Lotabweichungsdaten vorliegen (z.B. Hirt et al. 2004). Systematische instrumentelle Abweichungen konnten dabei in keinem der Fälle nachgewiesen werden.

Eine weitere mögliche Fehlerquelle der Lotabweichungsmessung kann der Einfluss von Refraktionsanomalien sein (z.B. Hirt 2006). Aufgrund wechselnder Wetterlagen während der mehrwöchigen astrogeodätischen Kampagne und aufgrund von zahlreichen Doppelbeobachtungen, die durchgeführt und gemittelt wurden, wird angenommen, dass Refraktionseinflüsse nur eine geringe Rolle im Fehlerhaushalt der Quasigeoidberechnung spielen.

Zusammenfassend kann als Ergebnis der Analyse der zufälligen und systematischen Fehler festgestellt werden, dass die astrogeodätische Quasigeoidbestimmung im Harz mit Millimetergenauigkeit (etwa 1.5–2 mm) über 65 km Profillänge durchgeführt wurde. Aufgrund des erreichten, übergeordneten Genauigkeitsniveaus kann das astrogeodätische Quasigeoidprofil für die Validierung des gravimetrischen Schwerefeldmodells GCG05 herangezogen werden.

## 5 Validierung des gravimetrischen Quasigeoidmodells GCG05

Entlang der in Abb. 2 dargestellten astrogeodätischen Traverse wurden Quasigeoidhöhen aus dem GCG05 (Liebsch et al. 2006) berechnet. Für den Vergleich mit der astrogeodätischen Lösung wurden die GCG05-Quasigeoidhöhen am Profilanfang auf Null gesetzt, da die astrogeodätische

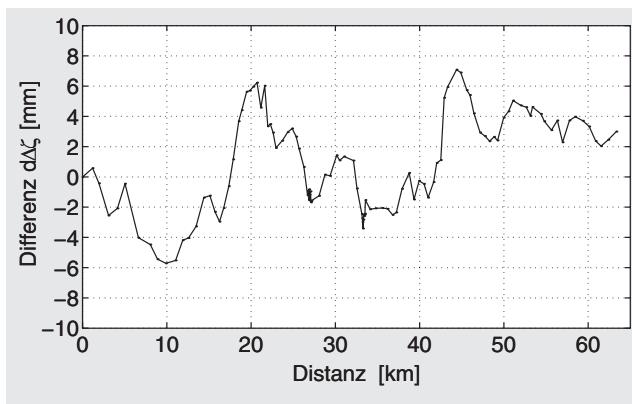


Abb. 11: Differenzen zwischen dem astrogeodätischen Quasigeoidprofil und dem gravimetrischen Modell GCG05

Tab. 4: Statistik des Vergleichs zwischen dem astrogeodätischen Quasigeoidprofil und dem GCG05, Angaben in mm

| Vergleich      | Min  | Max | Mittel | RMS |
|----------------|------|-----|--------|-----|
| Astro-QG - GCG | -5.7 | 7.1 | 0.8    | 3.2 |

Methode keine absoluten Quasigeoidhöhen  $\xi$ , sondern Quasigeoidhöhenunterschiede  $\Delta\xi$  liefert. In Abb. 11 sind die Differenzen dargestellt, die sich zwischen dem astrogeodätischen Quasigeoidprofil und dem gravimetrischen Modell GCG05 ergeben. Es ist eine sehr gute Übereinstimmung der beiden Lösungen zu erkennen. Der RMS-Wert aus Differenzen beträgt 3.2 mm (Tab. 4) und spiegelt die Unsicherheiten der astrogeodätischen und der gravimetrischen Lösung wider. An keiner Stelle des Profils überschreiten die Differenzen einen Betrag von 8 mm. Die Detailanalyse des Differenzprofils in Abb. 11 zeigt einen Trend von etwa 2 mm und größere Abweichungen bei Profilkilometer 20 und 45; die Amplituden betragen hier etwa 6 mm. Diese Bereiche fallen mit den größten Höhenänderungen des Harzprofils zusammen (vgl. Abb. 1 oder 5). Aufgrund der Genauigkeitsanalyse in Abschnitt 4.5 wird angenommen, dass die sichtbaren Differenzen zum größten Teil auf kleinere Unsicherheiten im gravimetrischen Quasigeoid GCG05 zurückzuführen sind.

## 6 Diskussion

Der Vergleich des astrogeodätischen Quasigeoidprofils mit dem gravimetrischen Quasigeoid GCG05 im Harz zeigte einen außerordentlich geringen RMS-Wert von 3.2 mm. Dieser Wert liegt deutlich unter der Genauigkeitsspezifikation des GCG05 von 1–2 cm und bestätigt die hohe Qualität, die sowohl die gravimetrische als auch die astrogeodätischen Lösung im Testgebiet Harz aufweisen. Da die astrogeodätische Validierung keine absoluten Aussagen erlaubt, gelten die ermittelten Genauigkeiten nicht

für (absolute) Höhen des Quasigeoids über dem Ellipsoid, sondern für Quasigeoidhöhdifferenzen.

Als Schlussfolgerung der durchgeföhrten Untersuchungen kann festgehalten werden, dass heutzutage mit dem astronomischen Nivellement ein Verfahren zur lokalen und regionalen Schwerefeldbestimmung getestet und verfügbar ist, das über einige 10 km Millimetergenauigkeit für Quasigeoidverläufe liefert. Die benötigten Lotabweichungsdaten können bei Stationsabständen von etwa 1 km wirtschaftlich mit digitalen Zenitkamerasystemen bestimmt werden. Für die genaue Interpolation von Lotabweichungen können im Mittelgebirge wie dem Harz hochauflösende DGM-Daten hinzugezogen werden.

Aufgrund des erreichten übergeordneten Genauigkeitsniveaus eignet sich die astrogeodätische Methode z.B. für Detailanalysen der Schwerefeldfeinstruktur und – neben der hier durchgeföhrten Überprüfung von gravimetrischen Quasigeoidmodellen – für die Validierung von weiteren Schwerefelddaten wie z.B. GPS-Nivellements punkten. Vor dem Hintergrund der anstehenden Erneuerung des Deutschen Haupthöhennetzes DHHN kommt unabhängigen Validierungstechniken wie der astrogeodätischen Methode in Zukunft besondere Bedeutung zu.

## Dank

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Förderung der Entwicklung des Hannoverschen Zenitkamerasystems TZK2-D, das für diese Studie eingesetzt werden konnte (Projekte Se 313/21 und Se 313/22). Dank gebührt den Vermessungsbehörden der Länder Niedersachsen, Sachsen-Anhalt und Thüringen für die Bereitstellung der DGM-Daten. Tobias Krömer, René Käker und René Gudat haben die astrogeodätischen Feldmessungen tatkräftig unterstützt.

## Literatur

- BKG (2005): Quasigeoid der Bundesrepublik Deutschland. Die Höhenreferenzfläche der Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen der Länder GCG05 (German Combined Quasigeoid 2005). Geodätische Basisdaten Bundesrepublik Deutschland. [www.geodatenzentrum.de/docpdf/quasigeoid.pdf](http://www.geodatenzentrum.de/docpdf/quasigeoid.pdf).
- Boedecker, G. (1976): Astrogravimetrisch-topographisches Nivellement. Wiss. Arb. Lehrst. für Geod., Phot. und Kart. Techn. Univ. Hannover Nr. 64.
- Bosch W. und Wolf H. (1974): Über die Wirkung von topographischen Lokal-Effekten bei profilweisen Lotabweichungs-Prädiktionen. Mitteilungen aus dem Institut für Theoretische Geodäsie der Universität Bonn Nr. 28.
- Bürki, B., Müller, A. und Kahle, H.-G. (2004): DIADEM: The New Digital Astronomical Deflection Measuring System for High-precision Measurements of Deflections of the Vertical at ETH Zurich. Electronic Proc. IAG GGSM2004 Meeting in Porto, Portugal. Auch veröffentlicht in: CHGeod 2003, Report 03-33 A (ed. U. Marti et al.), Bundesamt für Landestopographie (swisstopo), Wabern, Schweiz.
- Campbell J. (1971): Eine Erweiterung der Theorie des astronomischen Nivellements bei Einbeziehung von Schweremessungen. Wissen. Arb. Lehrst. Geod. Phot. u. Kart. TU Hannover Nr. 49.
- Denker, H. (1988): Hochauflösende regionale Schwerefeldbestimmung mit gravimetrischen und topographischen Daten. Wissen. Arb. Fach. Vermessungswesen Univ. Hannover Nr. 156.

- Elmiger A. (1969): Studien über Berechnung von Lotabweichungen aus Massen, Interpolation von Lotabweichungen und Geoidbestimmung in der Schweiz. Mitt. Inst. Geod. Phot. ETH Zürich Nr. 12.
- Feldmann-Westendorff, U. und Jahn, C.-H. (2006): GNSS-Höhenbestimmung in einem einheitlichen Raumbezug. 66. DVW-Seminar »GPS und GALILEO«, Deutscher Verein für Vermessungswesen e. V. – Gesellschaft für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement, 21.–22.02.2006, Darmstadt, Schriftenreihe 49/2006: 147–171.
- Flury J. (2002): Schwerkraftfunktionale im Gebirge – Modellierungsgenauigkeit, Messpunktichte und Darstellungsfehler am Beispiel des Testnetzes Estergebirge. DGK C 557.
- Galle, A. (1914): Das Geoid im Harz. Königl. Preuß. Geod. Inst. Nr 61. Berlin.
- Heitz, S. (1967): Ein Vorschlag zur Interpolation von astronomisch-geodätisch bestimmten Lotabweichungen. DGK A 55.
- Heitz, S. (1968): Geoidbestimmung durch Interpolation nach kleinsten Quadraten aufgrund gemessener und interpolierter Lotabweichungen. DGK C 124.
- Helmert, F. (1880/1884): Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. Teubner, Leibzig (reprint Minerva, Frankfurt a.M. 1961).
- Helmert, F. (1901): Zur Bestimmung kleiner Flächenstücke des Geoids aus Lotabweichungen mit Rücksicht auf Lotkrümmung. Sitzungsberichte Königl. Preuß. Akad. der Wissenschaften zu Berlin. 2. Mitteilung: 958–975.
- Helmert, F. (1913): Die Bestimmung des Geoids im Gebiet des Harzes. Sitzungsberichte der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1. Hb: 550–560.
- Hirt, C. (2001): Automatic Determination of Vertical Deflections in Real-Time by Combining GPS and Digital Zenith Camera for Solving the GPS-Height-Problem. Proceed. 14th International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation: 2540–2551, Alexandria, VA.
- Hirt, C. (2004): Entwicklung und Erprobung eines digitalen Zenitkamerasytems für die hochpräzise Lotabweichungsbestimmung. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik an der Universität Hannover Nr. 253.  
<http://edok01.tib.uni-hannover.de/edoks/e01dh04/393223965.pdf>.
- Hirt, C. (2006): Monitoring and Analysis of Anomalous Refraction Using a Digital Zenith Camera System. Astronomy and Astrophysics Volume 459, Issue 1, November III 2006, pp. 283–290. DOI: 10.1051/0004-6361:20065485.
- Hirt, C. und Bürgi, B. (2002): The Digital Zenith Camera – A New High-Precision and Economic Astrogeodetic Observation System for Real-Time Measurement of Deflections of the Vertical. Proceed. of the 3rd Meeting of the International Gravity and Geoid Commission of the International Association of Geodesy, Thessaloniki (ed. I. Tziavos): 161–166.
- Hirt, C. und Flury, J. (2007): Astronomical-topographic levelling using high-precision astrogeodetic vertical deflections and digital terrain model data. Journal of Geodesy. DOI: 10.1007/s00190-007-0173.
- Hirt, C. und Seeber, G. (2002): Astrogeodätische Lotabweichungsbestimmung mit dem digitalen Zenitkamerasytem TZK2-D. ZfV 127: 388–396.
- Hirt, C. und Seeber, G. (2006): High-Resolution Local Gravity Field Determination at the Sub-Millimeter Level using a Digital Zenith Camera System. Dynamic Planet, Cairns 2005 (ed. P. Tregoning und C. Rizos), IAG Symposia 130: 316–321.
- Hirt, C. und Seeber, G. (2007): Accuracy analysis of vertical deflection data observed with the Hannover Digital Zenith Camera System TZK2-D. Journal of Geodesy. DOI: 10.1007/s00190-007-0184.
- Hirt, C., Reese, B. und Enslin, H. (2004): On the Accuracy of Vertical Deflection Measurements Using the High-Precision Digital Zenith Camera System TZK2-D. GGSM 2004 IAG International Symposium Porto, Portugal (ed. C. Jekeli et al.), Springer, Heidelberg: 197–201.
- Hirt, C., Denker, H., Flury, J., Lindau, A. und Seeber, G. (2006): Astrogeodetic Validation of Gravimetric Quasigeoid Models in the German Alps – First Results. Accepted Paper presented at 1. Meeting of the International Gravity Field Service, Istanbul.
- Høg, E., Fabricius, C., Makarov, V.V., Urban, S., Corbin, T., Wycoff, G., Bastian, U., Schwendiek, P. und Wicenec, A. (2000): The Tycho-2 Catalogue of the 2.5 Million Brightest Stars. Astronomy and Astrophysics 355: L27–L30.
- Liebsch, G., Schirmer, U., Ihde, J., Denker, H. und Müller, J. (2006): Quasigeoidbestimmung für Deutschland. DVW-Schriftenreihe, No. 49, 127–146.
- Marti, U. (1997): Geoid der Schweiz 1997. Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz Nr. 56. Schweizerische Geodätische Kommission. www.sgc.ethz.ch/sgc-volumes/sgk-56.pdf.
- Nagy D., Papp G. und Benedek J. (2000): The Gravitational Potential and its Derivatives for the Prism. J Geod 74 (7–8): 552–560. DOI: 10.1007/s001900000116.
- Nagy D., Papp G. und Benedek J. (2002): Erratum: Corrections to »The gravitational potential and its derivatives for the prism«. J Geod 76 (8): 475–475. DOI: 10.1007/s00190-002-0264-7.
- Niethammer, T. (1939): Das astronomische Nivellement im Meridian des St. Gotthard. II. Die berechneten Geoidehebungen und der Verlauf des Geoidschnittes. Astronomisch geodätische Arbeiten in der Schweiz, Nr. 20. Schweizerische Geodätische Kommission. www.sgc.ethz.ch/sgc-volumes/sgk-20.pdf.
- PTB (2007): Schwereinformationssystem SIS. Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB), Braunschweig. www.ptb.de/de/org/1/11/115/index.htm.
- SAPOS (2007): Satellitenpositionierungsdienst der deutschen Landesvermessung. www.sapos.de.
- Torge, W. (1977): Untersuchungen zur Höhen- und Geoidbestimmung im dreidimensionalen Testnetz Westharz. ZfV 102: 173–185.
- Torge, W. (2003): Geodäsie. 2. Auflage. W. de Gruyter, Berlin, New York.
- Voigt, C., Denker, H. und Hirt, C. (2007): Regional Astrogeodetic Validation of GPS/Levelling Data and Quasigeoid Models. Accepted Paper presented at the IUGG General Assembly, Perugia.
- Zacharias, N., Zacharias, M.I., Urban, S.E. und Høg, E. (2000): Comparing Tycho-2 astrometry with UCAC1. The Astronomical Journal 120: 1148–1152.
- Zacharias, N., Urban, S.E., Zacharias, M.I., Wycoff, G.L., Hall, D.M., Monet, D.G. und Rafferty, T.J. (2004): The Second US Naval Observatory CCD Astrograph Catalog (UCAC2). The Astronomical Journal 127: 3043–3059.

**Anschrift der Autoren**

Christian Hirt  
 Department Geomatik  
 HafenCity Universität Hamburg  
 Hebebrandstraße 1, 22297 Hamburg  
 Tel: +49 40 52827-5323  
 christian.hirt@hcu-hamburg.de, chris.hirt@web.de

Uwe Feldmann-Westendorff | Cord-Hinrich Jahn  
 Landesvermessung und Geobasisinformation Niedersachsen (LGN)  
 Podbielskistraße 331, 30659 Hannover

Andreas Lindau  
 Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB)  
 Abteilung 1.1  
 Bundesallee 100, 38116 Braunschweig

Jakob Flury  
 Center for Space Research  
 3925 W Braker Lane #200, Austin, TX 78759, USA

Günter Seeber | Heiner Denker | Christian Voigt  
 Institut für Erdmessung  
 Leibniz Universität Hannover  
 Schneiderberg 50, 30167 Hannover