

Zur Berechnung von Flächen nach der Überführung des nordrhein-westfälischen Liegenschaftskatasters in das ETRS89

Burckhardt Ahrens

Zusammenfassung

Bei der Überführung des Liegenschaftskatasters in Nordrhein-Westfalen in das Europäische Terrestrische Referenzsystem 1989 ist eine Änderung der Flächengrößen gegenüber den bisher aus Koordinaten berechneten zu erwarten. Die Formeln, um die Verzerrung durch die Universelle Transversale Mercator-Projektion rückgängig zu machen, und andere Reduktionen werden vorgestellt. Die systematischen Einflüsse auf die ellipsoidischen Flächen werden untersucht und abgeschätzt. Es wird gezeigt, dass der größte Einfluss von den in den aktuellen Gauß-Krüger-Koordinaten verborgenen Maßstabsfaktoren ausgeht. Er wird gemindert durch die unterschiedliche Lagerung der zugehörigen Bezugsellipsoide. Die Einflüsse an sich, wie auch ihr Zusammenwirken, verändern die Flächen nur geringfügig gegenüber den Einflussgrößen durch eventuelle lokale Spannungen des Lagenetzes.

Summary

Converting the real estate cadastre in North Rhine-Westphalia to the European Terrestrial Reference System 1989 it is expected the areas will differ from those which are calculated from coordinates until now. The formulas to reverse the distortion of the Universal Transverse Mercator Projection and other reductions are presented. The systematical influences to the ellipsoidal areas are investigated and estimated. It is shown that the main influence is given by scale factors hidden in the actual coordinates. This is reduced by the different positions of the reference ellipsoids. The influences themselves as well as together will only change the areas minor, possibly not so the local tensions of the network.

1 Aufgabenstellung

Die Konkretisierung des Vorhabens, das nordrhein-westfälische Liegenschaftskataster in das Europäische Terrestrische Referenzsystem 1989 (ETRS89) zu überführen und zeitnah in das Amtliche Liegenschaftskatasterinformationssystem (ALKIS) zu migrieren, wirft auch die Fragen auf, was dabei bezüglich der Flächenangaben zu berücksichtigen ist und wie die Flächen zukünftig zu berechnen sind.

Um abbildungsunabhängige Angaben zu erhalten, wurden bisher die aus Gauß-Krüger-Koordinaten ermittelten Flächen auf das zugehörige Bezugsellipsoid zurückgeführt. Künftig soll ebenso die durch die Abbildung

der Koordinaten im Universellen Transversalen Mercator-System (UTM) eintretende Flächenverzerrung rückgängig gemacht werden. Die entsprechende Formel ist im Folgenden zu erläutern. Weitere Einflüsse auf die Flächenberechnungen, die sich aus den Reduktionen in die Bezugssysteme ergeben, sollen diskutiert werden. Auf die Aufgabe, Sollpunkte im UTM-System nach vorgegebenen Sollflächen zu koordinieren, wird jeweils besonders eingegangen.

Die Fertigstellung der Automatisierten Liegenschaftskarte (ALK) ermöglicht es bereits heute, landesweit Katasterflächen aus Gauß-Krüger-Koordinaten abzuleiten. Dies soll z.B. bei der Migration in das ALKIS bei den Eröffnungsbilanzen als Kontrollinstrument genutzt werden. Unter anderem sollen die Summen der »geometrisch berechneten« (aus Koordinaten abgeleiteten) Flächen aller Flurstücke in der Flur, der Gemarkung, der Gemeinde und dem Kreis vor und nach der Migration übereinstimmen. Wenn nun die Migration gleichzeitig mit der Überführung in das ETRS89 erfolgt, fehlen Flächen, die unmittelbar vergleichbar sind. Es stellt sich die Frage, ob und wie ein solcher Vergleich größerer Flächen herbeigeführt werden kann, insbesondere welche systematischen Einflüsse auf die Flächendifferenzen vor und nach der Überführung einwirken.

Auf kleinere Flächen, die aus Koordinaten berechnet werden, wirken sich kleinräumige Spannungen des Liegenschaftskatasters erheblich aus (der bekannte eine Quadratmeter, der durch einen Zentimeter in der Grundlinie auf 100 m resultiert). Sie sind im Einzelnen kaum zu prognostizieren. Ein Vergleich der »amtlichen« Flächen des Liegenschaftsbuches vor und nach der Überführung steht daher nicht im Fokus dieser Abhandlung. Die Einführung neuer amtlicher Flächen für einen ganzen Kreis, insbesondere die verwaltungstechnischen Aspekte, wurden von Kühbach (2007) eingehend beleuchtet.

Um die Zusammenhänge der verschiedenen Bezugssysteme deutlich zu machen, sei hier das bewährte Beispiel der Streckenreduktion den Untersuchungen vorangestellt. Es liefert auch den Grundstock für die abzuleitenden Formeln. Weil an mehreren Stellen im Folgenden auf Besonderheiten in Nordrhein-Westfalen Bezug genommen wird, wird einleitend der landesspezifische Überführungsansatz, soweit hier dem Verständnis dienlich, erläutert.

2 Der Berechnungsansatz für die Überführung in Nordrhein-Westfalen

Aktuelle Netzgrundlage für das Liegenschaftskataster in Nordrhein-Westfalen ist überwiegend das Netz 1977 (Netz77). Es gibt aber auch noch Gebiete im System der Preußischen Landesaufnahme oder in einer der zwischenzeitigen Netzerneuerungen, z.B. der Neutriangulation Ruhrgebiet 1966. Der Punktnachweiserlass NRW (Innenministerium NRW 2004a) kennzeichnet in der 2. und 3. Stelle des Lagestatus noch zwölf verschiedene DHDN90-basierte Lagenetze.

Im ETRS89 wurden zunächst übergeordnete Hierarchien durch Neumessung bestimmt. Teilweise konnten in Nordrhein-Westfalen im TP- und auch im AP-Feld vorhandene originäre Messungselemente für eine Neuberechnung genutzt werden (z.B. mit ursprünglich für das Netz77 angelegten Auftragsdateien für das Programmsystem KATRIN). Es ist nun eine Frage des leistbaren Aufwandes, in wieweit diese Vorgehensweisen zur Verdichtung des Netzes Anwendung finden. Ab einem bestimmten Verdichtungsgrad ist es unabwendbar, die Überführung des Liegenschaftskatasters durch Verwendung der bisherigen Koordinaten vorzunehmen.

Wegen der »Ungleichartigkeit« der Koordinaten im ETRS89 und in den DHDN90-Netzen aufgrund des mangelnden Zusammenhangs zwischen den Netzdefinitionen, lassen sich die Systeme nicht durch mathematisch eindeutige Umrechnungen, sondern nur durch Koordinatenumformungen überführen. In den Bundesländern kommen verschiedene Ansätze zur Anwendung. Für alle Ansätze der Koordinatenumformung werden Stützpunkte benötigt, also (»identische«) Punkte, für die in beiden Systemen Koordinaten vorliegen. Dies bedeutet, dass das ETRS89 so weit verdichtet werden muss, bis man Punkte bestimmen kann, von denen aus das bisherige Liegenschaftskataster abhängig koordiniert wurde. Neben der Wirtschaftlichkeitsfrage entscheiden die Spannungen in den Netzen über die notwendige Stützpunktdichte. Weil das ETRS89 bisher weitestgehend widerspruchsfrei aufgebaut wurde, sind die Spannungen in der Regel den bisherigen Landessystemen anzulasten.

Die unterschiedlichen Lagestatus, aber auch Inhomogenitäten der Koordinaten, mangelnde Abstimmung an den Grenzen der Katasteramtsbezirke usw. führen in Nordrhein-Westfalen dazu, dass ein landesweites Transformationsmodell mit Katastergenauigkeit nicht angeboten werden kann. Für die Überführung ihrer Daten des Liegenschaftskatasters sind die bei den Kreisen und kreisfreien Städten angesiedelten Katasterbehörden selbst zuständig. Sie legen auch die Stützpunkte für die Überführung fest und definieren die einzelnen Überführungsverfahren. Deren räumliche Begrenzungen richten sich nach der Stützpunktauswahl aufgrund des Lagestatus und den lokalen Spannungen sowie nach arbeitsorgani-

satorischen Gesichtspunkten. Um den Aufwand für die Abgrenzung der Verfahren zu minimieren, wird man sie so groß wie möglich gestalten wollen.

Das Land unterstützt die Katasterbehörden unter anderem durch die Bereitstellung des beim Landesvermessungsamt Nordrhein-Westfalen entwickelten Programms TRABBI-EDBS für die Überführung ALK-konformer Datenbanken bzw. durch die Abgabe der entsprechenden Berechnungsunterprogramme an die Entwickler der ALKIS-Komponenten und anderer Software-Anbieter.

Um den Katasterämtern eine unmittelbare Nutzung ihrer Stützpunktdaten für vorbereitende Tests und die endgültige Überführung zu ermöglichen, empfiehlt sich die Umformung mittels einer Helmert-Transformation. Während im TP-Feld noch dreidimensionale Transformationen eingesetzt wurden, ist es im AP-/Stützpunktfeld und im Liegenschaftskataster sinnvoller, zweidimensional zu arbeiten. Damit kann der Problematik der Beschaffung von Höhen für die Stützpunkte und der Einflüsse größerer Höhenungenauigkeiten auf die Lage aus dem Weg gegangen werden. Nach den Algorithmen von TRABBI-EDBS erfolgt die Koordinatenumformung durch eine Ähnlichkeits-Transformation mit vier Parametern. Eine 5- oder 6-Parameter-Transformation verkleinert zwar kosmetisch die Restklaffungen, ist aber geodätisch oder physikalisch nicht zu rechtfertigen. Nach Helmert wird zur Bestimmung der Transformationsparameter eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate (L2-Norm) durchgeführt: als Ausgleichungsunbekannte werden die Verschiebungen des Koordinatennullpunktes, ein Maßstab und ein Drehwinkel bestimmt.

Die Unterschiede zwischen den Abbildungen der Bezugssysteme hinsichtlich der Maßstabsfaktoren im Hauptmeridian, zum Teil auch mit einem Wechsel des Hauptmeridians, wirken sich auf alle Transformationsparameter aus. Diese repräsentieren also nicht mehr nur den Datumsübergang und sind unter Umständen zwischen verschiedenen Verfahren nicht mehr vergleichbar oder einsetzbar. In räumlich größeren Verfahren können unterschiedliche Abbildungen oder Hauptmeridiane zu Verzerrungen des zu transformierenden Gebietes führen. In TRABBI-EDBS werden darum die Koordinaten des Startsystems vorab in die Abbildung des Zielsystems übertragen. Dazu werden die Koordinaten des Startsystems mit den Parametern der Gauß-Krüger-Abbildung und den Dimensionen des Bessel-Ellipsoides in geographische Koordinaten umgerechnet, die sodann unter Beibehaltung des Ellipsoides in die UTM-Abbildung zurückgerechnet werden. Weil auch die Teile der Kreise Heinsberg und Kleve, die westlich des 6°-Meridians liegen, per Definition im Punktnachweiserlass NRW (Innenministerium NRW 2004a), Datengruppe: Lage, noch der Zone 32 zugeordnet werden, liegt Nordrhein-Westfalen vollständig in nur einer UTM-Zone. Mit Start- und Zielsystemkoordinaten, nunmehr beide in derselben Abbildung bezogen auf den 9°-Mittelmeridian, wird dann die Umformung durchgeführt.

Durch die im Allgemeinen große Anzahl von Überbestimmungen zeigen sich bei der Helmert-Transformation in den Stützpunkten die Spannungen der Netze in den Restklaffungen. Die umzuformenden Punkte sind durch eine Restklaffenverteilung, Homogenisierung oder andere Maßnahmen den Zielsystemkoordinaten der Stützpunkte anzupassen. In TRABBI-EDBS sind eine Restklaffenverteilung nach Abstandsgewichten sowie die Natural Neighbour Interpolation realisiert (Hettwer und Benning 2003, Ahrens 2004).

3 Die Bezugssysteme am Beispiel der Streckenreduktion

Eine terrestrisch (z.B. elektrooptisch) gemessene Distanz wird bereits im Instrument oder bei der häuslichen Bearbeitung Korrekturen unterzogen, um die Ergebnisse der Eichungen anzubringen und die meteorologischen Einflüsse zu beseitigen. Es entsteht rechnerisch die geradlinige Verbindung s_1 zwischen Instrument und Ziel (Abb. 1). Es könnte sich hierbei aber auch um eine Strecke handeln, die mit räumlichem Pythagorassatz aus satellitengestützt bestimmten XYZ-Koordinaten zweier Punkte abgeleitet wurde.

Mithilfe des gleichzeitig gemessenen Zenitwinkels z oder des berechneten Höhenunterschiedes zwischen Instrument und Ziel kann s_1 durch Anbringen der Neigungsreduktion in die horizontale Strecke s_H überführt werden.

Bei den bisherigen Berechnungen war nun s_H auf das DHDN-Ellipsoid (Dimensionen: Bessel, Lagerung: Deutsches Hauptdreiecksnetz, hier: DHDN90 (West)) zu reduzieren. Weil die Höhen h_D über dem Ellipsoid nicht bekannt waren, behalf man sich, indem man dafür die Höhen H über einer Höhenbezugsfläche einsetzte. Als Höhenbezugsfläche wurde in Deutschland, in Nordrhein-Westfalen 2001, Normal-Null (NN) durch Normalhöhen-null (NHN) abgelöst. Die Höhendifferenzen zwischen der Höhenbezugsfläche und dem Lagebezugsellipsoid werden Undulationen N , an anderen Stellen Geoidhöhen N , genannt. Sie lassen sich in einem Undulationsstützpunktfeld interpolieren (Spata et al. 2001a).

Die Undulationen werden beeinflusst von der Schwereverteilung unter der Erdoberfläche. Großräumig betrachtet finden wir in Nordrhein-Westfalen große Undulationswerte im Bereich des Sauerlandes und der Eifel, kleine Werte im Münsterland und in der Kölner Bucht. Ein für Nordrhein-Westfalen entwickeltes Undulationsmodell (aktuell das Modell 2007) weist die größte NHN-DHDN90-Undulationen mit 1,7 m in der TK25 Nr. 4816, die kleinste mit -0,9 m in der TK25 Nr. 4901 auf (Abb. 2). Der Einfluss dieser Undulationen auf die Streckenreduktion ist tatsächlich so gering, dass sie nur im TP-Netz 1. Ordnung berücksichtigt werden mussten.

Um nun die horizontierte Strecke s_H auf die Sehne s_2 am DHDN90-Ellipsoid zu reduzieren, gilt vereinfacht die Formel

$$s_2 = s_H \cdot \frac{r_B}{r_B + h_D}, \quad (1a)$$

$$h_D \approx H + g \quad (1b)$$

mit r_B als dem mittleren »Gaußschen« Krümmungshalbmesser des Bessel-Ellipsoides, der Höhe H des Instrumentenstandpunktes über der Höhenbezugsfläche (NHN) und der Instrumentenhöhe g auf dem Standpunkt.

Wird nun noch die Erdkrümmungsreduktion angebracht, erhält man die ellipsoidische Strecke s_D :

$$s_D = s_2 + \frac{s_2^3}{24 \cdot r_B^2}. \quad (2)$$

Für die weitere Bearbeitung ist zu entscheiden, auf welcher Netzgrundlage gerechnet werden soll. Je nach Netz ist die ellipsoidische Strecke s_D in ein lokal variierendes sogenanntes Meter des TP-Feldes zu reduzieren:

$$s_T = s_D \cdot (1 - m_T). \quad (3)$$

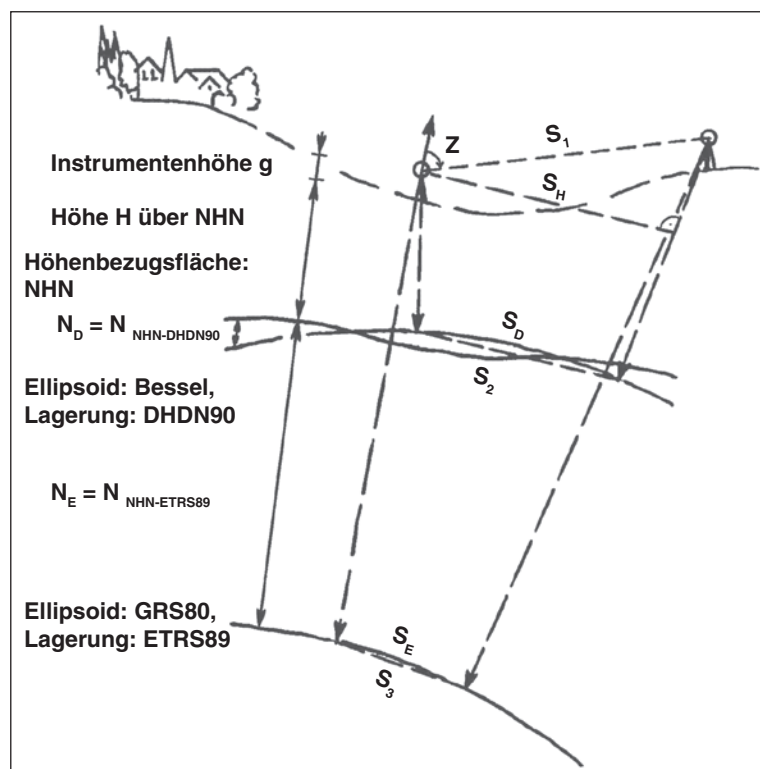


Abb. 1: Die Bezugssysteme am Beispiel der Streckenreduktion

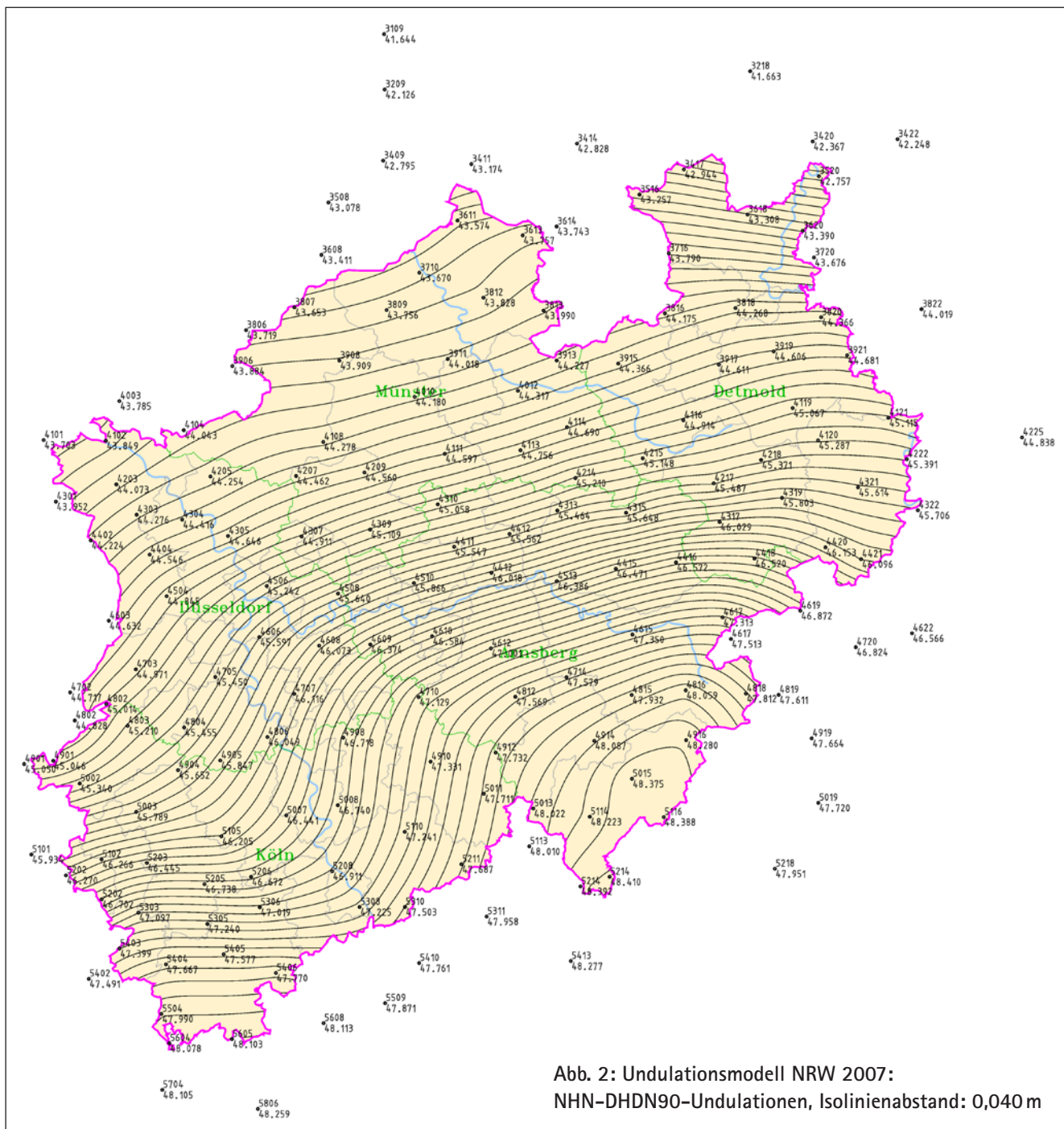


Abb. 2: Undulationsmodell NRW 2007:
NHN-DHDN90-Undulationen, Isolinienabstand: 0,040 m

Der Faktor m_T im Netz77, berechnet aus dem TP-Netz 2. Ordnung, liegt zwischen 8 ppm im Südosten des Regierungsbezirks Detmold und Höchstwerten bis zu 18 ppm zwischen Rhein und Staatsgrenze zu den Niederlanden. Große Teile des Landes liegen bei 13 und 14 ppm. Nach Nordosten hin ist ein systematisches Gefälle zu erkennen, um in der Übergangszone nach Niedersachsen den Wert 9,1 ppm zu erreichen (Klugmann 1992).

Die Standardabbildung im DHDN90 ist das Gauß-Krüger-Koordinatensystem, in das die Strecke s_T im Meter des TP-Feldes durch die Reduktion in die Abbildungsebene zu überführen ist. An dieser Stelle reicht die Überschlagsformel (vergl. AdV 1982):

$$s_G = s_T \cdot \left(1 + \frac{y_M^2}{2 \cdot r_B^2} \right), \quad (4a)$$

$$y_M = \frac{y_S + y_Z}{2} \quad (4b)$$

mit y_S und y_Z als Abstand des Stand- und des Zielpunktes zum Hauptmeridian.

Mit der abbildungsreduzierten Strecke s_G lassen sich nun z.B. die Koordinaten von Neupunkten in einem DHDN90-basierten Netz berechnen. Es sei noch erwähnt, dass die hier aufgezählten Reduktionsberechnungen nur im TP-Feld, bestenfalls im AP-Feld individuell für jede einzelne Distanzmessung durchgeführt werden. In untergeordneten Messungen werden die Reduktionen berücksichtigt, indem durch Einpassung in die Anschlusspunkt-

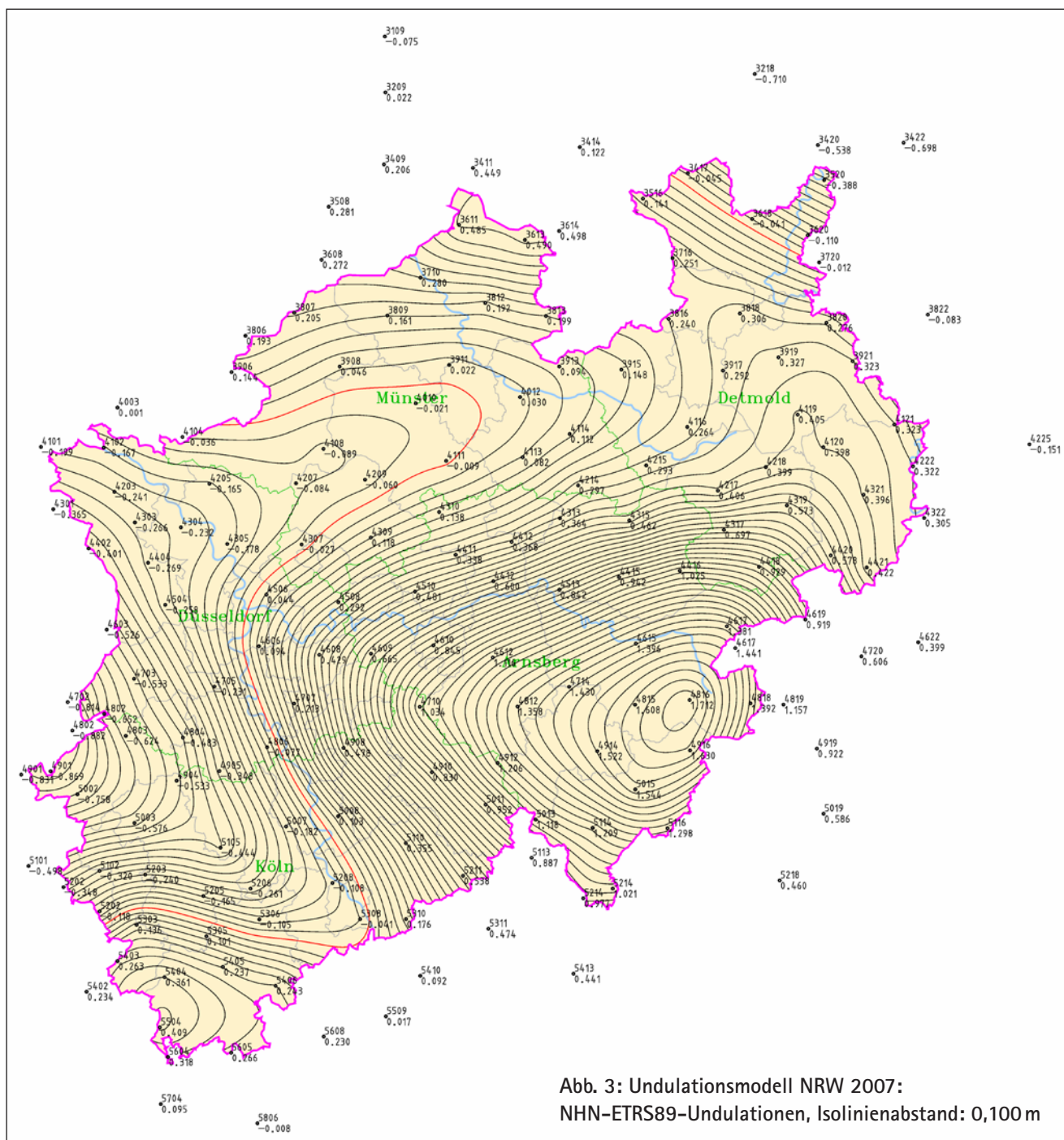


Abb. 3: Undulationsmodell NRW 2007:
NHN-ETRS89-Undulationen, Isolinienabstand: 0,100 m

koordinaten berechnungsimmanent für jede Messeinheit ein lokaler Maßstab berücksichtigt wird, der zugleich auch die Spannungen der Anschlüsse aufnimmt.

Soll nun die gemessene Distanz für Berechnungen im ETRS89 verwendet werden, so sind die gleichen Korrekturen und auch die Neigungsreduktion wie bei der Berechnung im DHDN90 anzubringen.

Bei der Höhenreduktion ist nun allerdings die Höhe h_E über dem ETRS89-Ellipsoid (Dimensionen: Geodetic Reference System 1980 (GRS80), Lagerung: ETRS89) einzusetzen:

$$s_3 = s_H \cdot \frac{r_G}{r_G + h_E} \quad (5a)$$

mit r_G als dem mittleren »Gaußschen« Krümmungshalbmesser des GRS80-Ellipsoides. Sollte h_E nicht bei einer satellitengestützten Messung mit bestimmt worden sein, lässt sie sich z.B. über eine NHN-Höhe indirekt errechnen:

$$h_E = H + N_E + g. \quad (5b)$$

N_E ist hierbei die Höhendifferenz zwischen der Höhenbezugsfläche (NHN) und dem ETRS89-Ellipsoid, also die NHN-ETRS89-Undulation. Diese Undulationen nehmen in Nordrhein-Westfalen Werte zwischen +42,5 m in der TK25 Nr. 3520 und +48,5 m in der TK25 Nr. 5214 an (Abb. 3).

Die NHN-ETRS89-Undulationen beeinflussen die Streckenreduktion um etwa 7 mm pro Kilometer und sollten in übergeordneten Messungen wie bisher im TP-Feld, auch im AP- oder heutigem Stützpunktfeld nicht vernachlässigt werden.

Die Unterschiede in den Größenordnungen der Undulationen bezüglich des DHDN90 und des ETRS89 sind auf die verschiedenen Dimensionen der Ellipsoide zurückzuführen, die durch die versetzte Lagerung ihrer Mittelpunkte zueinander nur zum Teil aufgefangen werden. Die Unterschiede zwischen der Klaffung der Maximal- und Minimalwerte von 2,8 m im DHDN90 und 6,0 m im ETRS89 weist auf die Verkantung der Ellipsoide zueinander hin.

Auch an s_3 ist die Erdkrümmungsreduktion anzubringen:

$$s_E = s_3 + \frac{s_3^3}{24 \cdot r_G^2} \quad (6)$$

Im ETRS89 gibt es kein Meter des TP-Feldes, einheitlicher Maßstab ist das internationale Meter (der Maßstabsfaktor im Hauptmeridian ist der UTM-Abbildung zuzuordnen und wird bei der Abbildungsreduktion angerechnet):

$$s_I = s_E \quad (7)$$

Die Standardabbildung des ETRS89, das UTM, ist ebenso eine Gaußsche konforme Abbildung wie das Gauß-Krüger-System. Sie unterscheiden sich dadurch, dass im UTM-System ein Maßstabsfaktor m_H im Hauptmeridian von 0,9996 angebracht wird. Die Breite der Meridianstreifen (Zonen) beträgt hier 6°. Um die ellipsoidische Strecke s_I im internationalen Meter in die abbildungsreduzierte Strecke s_U zu überführen, sei hier ebenfalls die Überschlagsformel verwendet:

$$s_U = s_I \cdot m_H \cdot \left(1 + \frac{y_M^2}{2 \cdot r_G^2}\right) = s_E \cdot m_H \cdot \left(1 + \frac{y_M^2}{2 \cdot r_G^2}\right), \quad (8a)$$

$$y_M = \frac{y_S + y_Z}{2} \quad (8b)$$

mit y_S und y_Z als Abstand des Stand- und des Zielpunktes zum Hauptmeridian und m_H als Maßstabsfaktor des UTM-Systems im Hauptmeridian. Weitere Glieder der Reihenentwicklungen, die wegen der 6° breiten Zonen an Entfernungen im TP-Netz höherer Ordnung anzubringen sind, bleiben im Folgenden unberücksichtigt (vergl. z.B. Schödlbauer 1982, S. 240 ff.).

Im ETRS89 gibt es nur ein aktuelles Gebrauchslagenetz, so dass der Name »ETRS89« sowohl für das Bezugssystem als auch die Netzdefinition steht.

4 Die Abbildungsreduktion der Flächen

Wie an den Streckenreduktionen in die Abbildungsebene zu erkennen ist, sind die Verzerrungen bei Gaußschen konformen Koordinaten abhängig vom Abstand zum Hauptmeridian. Um abbildungsunabhängige Flächengrößen zu erhalten, sind die aus Landeskoordinaten ermittelten Flächen auf das Ellipsoid zurückzuführen.

Für das Gauß-Krüger-System gilt:

$$F_T = F_G \cdot \left(1 - \frac{y_M^2}{r_B^2}\right) \quad (9)$$

oder

$$F_T = F_G - V_F \quad \text{mit} \quad (10a)$$

$$V_F = F_G \cdot \frac{y_M^2}{r_B^2} \quad (10b)$$

mit F_T als Fläche auf dem DHDN-Ellipsoid (aber noch im Meter des TP-Feldes), F_G als aus Gauß-Krüger-Koordinaten abgeleitete Fläche und r_B als dem mittleren »Gaußschen« Krümmungshalbmesser des Bessel-Ellipsoides. Die Formel (10b) ist im Fortführungsvermessungserlass NRW (Innenministerium NRW 2000), Anlage 8, zu finden. (10a) ergibt sich aus dem Text zu Nr. 13.22: »Werden Gauß-Krüger-Koordinaten verwendet, so ist die errechnete Fläche erforderlichenfalls um die durch die Abbildungsverzerrung eingetretene Flächenvergrößerung zu vermindern (siehe Vorblatt zu Anlage 8).«

Um die entsprechende Formel für das ETRS89 zu entwickeln, hilft (8): Es seien a_U und b_U die aus Koordinaten berechneten Seiten eines Rechtecks, ihr Produkt die Fläche F_U . In (8) eingesetzt und invertiert ergibt sich für die Fläche F_E auf dem ETRS89-Ellipsoid:

$$a_E = \frac{a_U}{m_H} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y_{Ma}^2}{2 \cdot r_G^2}}, \quad (11a)$$

$$b_E = \frac{b_U}{m_H} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y_{Mb}^2}{2 \cdot r_G^2}}, \quad (11b)$$

$$F_E = a_E \cdot b_E = \frac{a_U}{m_H} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y_{Ma}^2}{2 \cdot r_G^2}} \cdot \frac{b_U}{m_H} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y_{Mb}^2}{2 \cdot r_G^2}} \quad (12)$$

Für y_{Ma} und y_{Mb} kann y_M als der Abstand des Schwerpunktes der Fläche vom Hauptmeridian eingesetzt werden:

$$F_E = \frac{F_U}{m_H^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{y_M^2}{2 \cdot r_G^2}\right)^2} \quad (13)$$

oder mit

$$F_E = \frac{F_U}{m_H^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y_M^2}{r_G^2} + \frac{y_M^4}{4 \cdot r_G^4}} \approx F_U \cdot \left(\frac{1}{m_H^2} - \frac{y_M^2}{m_H^2 \cdot r_G^2} + \frac{3 \cdot y_M^4}{m_H^2 \cdot 4 \cdot r_G^4} - \dots \right) \quad (14)$$

y_M überschreitet in Deutschland nirgends 230 km. Der mittlere Krümmungshalbmesser r_G des GRS80-Ellipsoids ist mit 6383 km anzusetzen. Damit beträgt der letzte oben ausgeschriebene Term der Näherungsformel maximal $1,26 \cdot 10^{-6}$. Für eine Gebrauchsformel mit einer Rundung auf volle Quadratmeter und einer entsprechend geforderten Rechengenauigkeit kann er, wie die nachfolgenden Terme, bis zu einer Flächengröße von 60 Hektar vernachlässigt werden. Unter diesen Bedingungen ergibt sich für die ellipsoidische Fläche:

$$F_E = \frac{F_U}{m_H^2} \cdot \left(1 - \frac{y_M^2}{r_G^2} \right) \quad (15)$$

mit $m_H = 0,9996$ und $r_G \approx 6383000$ m.

Die Annahme, dass sich ein aus Koordinaten abgeleitetes Rechteck $a \cdot b$ auch als Rechteck auf dem Ellipsoid abbildet, gilt bei Gaußschen Koordinaten theoretisch nur für differentiell kleine Bereiche, ist aber wegen der geringen Winkelverzerrungen auch für das Liegenschaftskataster noch gültig. Wenn also praktisch die rechten Winkel erhalten bleiben, gilt das auch für andere Elemente von Flächenberechnungsformeln wie die Grundseite und die Höhe eines Dreiecks oder die Koordinaten und Koordinatenunterschiede in den Gaußschen Flächenformeln.

Programmiertechnisch ist Formel (15) ohne weiteres realisierbar. Sie sollte auch bei der »manuellen« Berechnung, z. B. mit einem Taschenrechner, angewendet werden. Das Abtrennen eines Reduktionsgliedes V empfiehlt sich nicht, weil bei der Abbildungsreduktion im UTM-System die Formel komplizierter würde und positive wie auch negative V vorkämen und damit leichter zu Vorzeichenfehlern führen könnten.

Um die Größenordnung der Reduktionen aufzuzeigen, wurde dennoch in der Tab. 1 der Reduktionsbetrag herausgerechnet. Angegeben werden für verschiedene

Abstände zum Hauptmeridian die Beträge für einen Hektar:

$$V_E [m^2] = 10000 [m^2] \cdot \frac{1}{0,9996^2} \cdot \left(1 - \frac{y_M [km]^2}{6383 [km]^2} \right) - 10000 [m^2] \quad (16)$$

Anders als bei Gauß-Krüger-Koordinaten, bei denen Flächen am Hauptmeridian nicht von der Abbildungsreduktion betroffen sind, sind im UTM-System die Flächen am Hauptmeridian um den Faktor $8 \cdot 10^{-4}$ zu vergrößern. Wie bei den Strecken liegt der Bereich, in dem die Reduktion keine Auswirkungen zeigt, bei einem Abstand von etwa 180 km vom Hauptmeridian (Spatz 2001b). Erst von dort ab bis zum Grenzmeridian hin sind die UTM-Flächen zu vermindern, um ellipsoidische Werte zu erhalten.

Ist für eine Absteckung eine ellipsoidische (Buch-)Fläche F_E vorgegeben und soll die Berechnung von Sollpunkten im UTM-Koordinatensystem vorgenommen werden, ist die Fläche in die Abbildung umzurechnen. Die entsprechende Formel kann aus (13) entwickelt werden:

$$F_U = F_E \cdot m_H^2 \cdot \left(1 + \frac{y_M^2}{2 \cdot r_G^2} \right)^2 = F_E \cdot \left(m_H^2 + \frac{m_H^2 \cdot y_M^2}{r_G^2} + \frac{m_H^2 \cdot y_M^4}{4 \cdot r_G^4} \right) \quad (17)$$

Der letzte Term beträgt maximal $4,21 \cdot 10^{-7}$, so dass die Formel vereinfacht werden kann zu:

$$F_U = F_E \cdot m_H^2 \cdot \left(1 + \frac{y_M^2}{r_G^2} \right) \quad (18)$$

mit $m_H = 0,9996$ und $r_G \approx 6383000$ m.

Erfolgt die Absteckung vor Ort nicht instrumentenunterstützt aus den UTM-Koordinaten der Sollpunkte, sondern z. B. mit dem Messband, sind die aus Koordinaten ermittelten Absteckmaße zunächst zu ellipsoidischen Strecken und dann in die Höhe des Geländes über dem ETRS89-Ellipsoid umzurechnen.

Tab. 1: UTM-Flächenreduktionen für 1 ha

y_M [km]	0	30	60	90	120	150	180	210	240
East _i [km]	32500	32470	32440	32410	32380	32350	32320	32290	32260
		32530	32560	32590	32620	32650	32680	32710	32740
	33500	33470	33440	33410	33380	33350	33320	33290	33260
$V_{10000} [m^2]$	+8,00	+7,78	+7,12	+6,02	+4,47	+2,48	+0,05	-2,83	-6,14

5 Die Höhenreduktion bei Flächen

Eine Formel für die Zurückführung der Flächen auf Geländehöhe ist aus (5) abzuleiten. Es wird wieder ein Rechteck, diesmal F_H mit den Seiten a_H und b_H , angenommen. Die Erdkrümmungsreduktion braucht hier nicht in Betracht gezogen zu werden: Ihre Reduktionsbeträge überschreiten auf beiden Bezugsellipsoiden erst ab 10 km für s_2 bzw. s_3 den Wert von einem Millimeter und haben bei 20 km einen Zentimeter noch nicht erreicht, spielen für Flächenberechnungen somit keine Rolle. Es kann daher gesetzt werden:

$$a_H = a_3 \cdot \frac{r_G + h_E}{r_G} = a_E \cdot \frac{r_G + h_E}{r_G}, \quad (19a)$$

$$b_H = b_3 \cdot \frac{r_G + h_E}{r_G} = b_E \cdot \frac{r_G + h_E}{r_G}, \quad (19b)$$

$$\begin{aligned} F_H &= a_H \cdot b_H = a_E \cdot b_E \cdot \left(\frac{r_G + h_E}{r_G} \right)^2 \\ &= F_E \cdot \left(1 + \frac{h_E}{r_G} \right)^2 = F_E \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot h_E}{r_G} + \frac{h_E^2}{r_G^2} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Der letzte ausgeschriebene Term nimmt selbst bei 3000 m für h_E nur $2,2 \cdot 10^{-7}$ an, so dass die Formel vereinfacht werden kann zu:

$$F_H = F_E + V_h \text{ mit} \quad (21a)$$

$$V_h = F_E \cdot \frac{2 \cdot h_E}{r_G}. \quad (21b)$$

Um eine Vorstellung von der Größenordnung einer Zurückführung auf Geländehöhe zu geben, seien als Beispiele zwei Sportplätze verwendet. Auf der TK25 Nr. 4816 findet sich ein Platz bei Altastenberg mit einer NHN-Höhe von etwa 780 m. Die NHN-ETRS89-Undulation beträgt hier etwa 48 m. Eine fingierte Größe z.B. für das Fußballfeld von einem Hektar als Fläche auf dem ETRS89-Ellipsoid würde zu einer Vergrößerung in Geländehöhe von $2,59 \text{ m}^2$ führen. Beim Sportplatz in Waldflecht auf der TK25 Nr. 4901 in einer Höhe von 45 m über NHN und mit einer Undulation von ebenfalls 45 m würde bei einem Hektar die Vergrößerung zur Fläche in Geländehöhe nur $0,28 \text{ m}^2$ betragen. Ein Hektar auf dem DHDN90-Ellipsoid würde sich bei gleichen Höhenlagen um $2,44 \text{ m}^2$ bzw. $0,14 \text{ m}^2$ vergrößern.

Die auf das DHDN90 bezogenen Vorschriften in Nordrhein-Westfalen, sowohl im aktuellen Fortführungsvermessungserlass NRW als auch in seinen Vorgängern, sehen neben der Abbildungsentzerrung keine weitere Zurückführung vor, also auch nicht auf die Geländehöhe.

Neben rechtlichen Aspekten ist dabei zu bedenken, dass eine automatisierte Flächenberechnung zusätzlichen Datenerhebungs- und Datenhaltungsaufwand für die Höhe erfordern würde. Auch nach der Überführung sollen in Nordrhein-Westfalen weiterhin ellipsoidische Flächen ausgewiesen werden. Sie beziehen sich dann aber auf das GRS80-Ellipsoid des ETRS89.

Niedersächsische Veröffentlichungen weisen dagegen Formeln aus, in die neben der Abbildungsentzerrung auch eine gemittelte Höhe des Messungsgebietes einfließt (LGN 2007; Jahn, Stegelmann 2007). Für Brandenburg liegen Formeln mit einer mittleren Geländehöhe vor (Innenministerium BB 2007, Anhang 1). Obwohl die Unterschiede gering sind, wäre eine Einigung im Rahmen der AdV wünschenswert.

Eine Zurückführung auf Geländehöhe sowohl im DHDN90 als auch im ETRS89 hätte den Vorteil, dass die unterschiedlichen ellipsoidischen Höhen (bzw. als Ersatz die NHN-Höhe) die unterschiedliche Lagerung der Bezugsellipsoide aufnehmen würden. Somit aber verbleibt die Frage, welchen Einfluss die gegenseitige Lagerung auf die Flächen hat. Zur Beantwortung wird wiederum Formel (5a) für die Höhenreduktion herangezogen. Statt der ellipsoidischen Höhe h_E wird jetzt jedoch Δh als Abstand zwischen den Ellipsoiden eingesetzt.

Dieser Abstand ist als Differenz der NHN-DHDN90-Undulationen N_D zu den NHN-ETRS89-Undulationen N_E abzugreifen. Die Punkte mit den Extremwerten aus beiden Undulationsmodellen decken die Himmelsrichtungen in Nordrhein-Westfalen gut genug ab, so dass sie hier zur Bestimmung eines mittleren Δh herangezogen werden können. Außerdem wurden in Tab. 2 schon Werte für weitere Tests aufgenommen. Unter Δs nach (5a) der Einfluss von Δh auf eine Strecke von 1 km angegeben.

Tab. 2: Differenzen zwischen NHN-ETRS89- und NHN-DHDN90-Undulationen

Stützpunkt	N_E	N_D	Δh	Δs
TK25 Nr.	m	m	M	mm/km
5214...	48,41	1,02	47,39	-7,4
4901...	45,05	-0,87	45,92	-7,2
4816...	48,06	1,71	46,35	-7,3
3520...	42,75	-0,39	43,14	-6,8
Mittel			45,70	-7,2
4020	44,89	0,37	44,52	-7,0
4110	44,42	-0,04	44,46	-7,0
4318	45,86	0,60	45,26	-7,1
4703	44,98	-0,58	45,56	-7,1
4909	46,99	0,59	46,40	-7,3

Für die folgende Übersichtsrechnung ist das Mittel der vier ersten Höhendifferenzen von 45,70 m ausreichend.

Zur Entwicklung der Formel wird ein Rechteck F_2 auf der Höhe des DHDN90-Ellipsoides mit den Seiten a_2 und b_2 angenommen. Es ist wegen Δh zu F_3 auf der Höhe des ETRS89-Ellipsoides zu reduzieren. Mit der Vernachlässigbarkeit der Erdkrümmung können statt der Sehnen direkt die ellipsoidischen Strecken eingesetzt werden:

$$a_E = a_3 = a_2 \cdot \frac{r_G}{r_G + \Delta h} = a_D \cdot \frac{r_G}{r_G + \Delta h}, \quad (22a)$$

$$b_E = b_3 = b_2 \cdot \frac{r_G}{r_G + \Delta h} = b_D \cdot \frac{r_G}{r_G + \Delta h}. \quad (22b)$$

$$F_E = a_E \cdot b_E = a_D \cdot b_D \cdot \left(\frac{r_G}{r_G + \Delta h} \right)^2 = F_D \cdot \frac{r_G^2}{r_G^2 + 2 \cdot r_G \cdot \Delta h + \Delta h^2}, \quad (23a)$$

$$F_E = F_D \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \Delta h}{r_G} + \frac{3 \cdot \Delta h^2}{r_G^2} - \dots \right). \quad (23b)$$

Mit dem Mittelwert von 45,70 m ergibt sich für den letzten ausgeschriebenen Term $1,5 \cdot 10^{-10}$. Somit kann gerechnet werden:

$$F_E = F_D - V_e \text{ mit} \quad (24a)$$

$$V_e = F_D \cdot \frac{2 \cdot \Delta h}{r_G}. \quad (24b)$$

Das ergibt einen Reduktionsbetrag V_e von $F_D \cdot 1,43 \cdot 10^{-5}$, 0,014 Promille der Flächengröße oder 0,14 m² pro Hektar. Es wäre nun denkbar, eine konstante künstliche Ellipsoidhöhe einzuführen, um sich den bisherigen Flächen im DHDN90 zu nähern. Das erscheint jedoch wenig zielgerichtet, zumal, wie noch gezeigt wird, der Einfluss der Ellipsoidlagerung durch den Einfluss der Netzspannungen überlagert wird.

Für den Fall, dass für eine Absteckung eine Fläche F_H in Geländehöhe vorgegeben wird, ist die Fläche als erstes auf das ETRS89-Ellipsoid zu reduzieren, wenn die Berechnung der Absteckungspunkte im UTM-Koordinatensystem vorgenommen werden soll. Die Inversion von (20) ergibt:

$$F_E = F_H \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{h_E}{r_G} \right)^2} = F_H \cdot \frac{1}{1 + 2 \cdot \frac{h_E}{r_G} + \frac{h_E^2}{r_G^2}} = F_H \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{h_E}{r_G} + 3 \cdot \frac{h_E^2}{r_G^2} - \dots \right). \quad (25)$$

Auch hier wird der letzte ausgeschriebene Term untersucht. Er bleibt bei h_E bis zu 3000 m unter $6,6 \cdot 10^{-7}$, kann also vernachlässigt werden. Es ergibt sich:

$$F_E = F_H - V_h \text{ mit} \quad (26a)$$

$$V_h = F_H \cdot \frac{2 \cdot h_E}{r_G}. \quad (26b)$$

h_E ist die Geländehöhe über dem ETRS89-Ellipsoid; sie ist eventuell unter Berücksichtigung der NHN-ETRS89-Undulation aus der NHN-Höhe zu ermitteln. r_G kann mit 6383000 m angenommen werden. Nunmehr kann, wie oben beschrieben, die ellipsoidische Fläche F_E in die abbildungsreduzierte Fläche F_U umgerechnet werden, um die UTM-Koordinaten der Absteckungspunkte zu berechnen.

Auch hier gilt, dass, wenn die Absteckung nicht instrumentenunterstützt aus den UTM-Koordinaten der Sollpunkte erfolgt, die aus Koordinaten ermittelten Absteckmaße über das Ellipsoid auf die Geländehöhe zurückzurechnen sind.

6 Der Flächenvergleich unter Berücksichtigung großräumiger Netzspannungen und der Ellipsoidlagerung

Am Beispiel der Streckenreduktion ist ersichtlich, dass nur durch die Berücksichtigung der Abbildungsverzerrung bei der Flächenberechnung im DHDN90 noch nicht die ellipsoidische Fläche im internationalen Meter ermittelt wird. Die Fläche ist vielmehr noch behaftet mit dem lokal differierenden Netzmaßstab. Auch hierfür sehen die Vorschriften in Nordrhein-Westfalen keine Berücksichtigung bei der Flächenberechnung vor. Der Einfluss des Netzmaßstabes ist gering, so dass er in den Fehlergrenzen abgefangen wird. Es ist jedoch zu vermuten, dass er in der gleichen Größenordnung wie der Einfluss der Ellipsoidlagerung liegt und soll daher hier näher untersucht werden.

Der Einfluss eines Netzmaßstabes auf die Fläche im DHDN90 ist nach (3) abzuleiten. Für ein Rechteck F_D werden die Seiten a_D und b_D angenommen:

$$a_D = a_T \cdot \frac{1}{1 - m_T}, \quad (27a)$$

$$b_D = b_T \cdot \frac{1}{1 - m_T}, \quad (27b)$$

$$F_D = a_D \cdot b_D = a_T \cdot b_T \cdot \left(\frac{1}{1 - m_T} \right)^2 \approx F_T \cdot (1 + m_T)^2 \approx F_T \cdot (1 + 2 \cdot m_T) \quad (28)$$

oder

$$F_D = F_T + V_t \text{ mit} \quad (29a)$$

$$V_t = F_T \cdot 2 \cdot m_T. \quad (29b)$$

Interessanter ist nun die Kombination der Einflüsse von Netzmaßstab und Ellipsoidlagerung, da beide etwa gleich stark auf die Flächen wirken. Um die Relationen der beiden Einflüsse darzustellen, wird zunächst ein Maßstab M_K untersucht, der das Verhältnis einer Strecke s_T im Netzmaßstab des DHDN90 zur Strecke s_E auf dem ETRS89-Ellipsoid wiedergibt. Da auch hier die Krümmungsreduktion vernachlässigt werden kann, kann mit (3) und (22) verdeutlicht werden:

$$M_K = \frac{s_E}{s_T} \text{ mit} \quad (30a)$$

$$s_T = s_D \cdot (1 - m_T) \quad (30b)$$

und

$$s_E = s_D \cdot \frac{r_G}{r_G + \Delta h} \approx s_D \cdot \left(1 - \frac{\Delta h}{r_G}\right), \quad (30c)$$

$$\frac{\Delta h}{r_G} = m_e = -\Delta s, \quad (30d)$$

$$s_E = s_D \cdot (1 - m_e). \quad (30e)$$

Das wird zu:

$$M_K \approx \frac{s_D \cdot (1 - m_e)}{s_D \cdot (1 - m_T)} \approx (1 - m_e) \cdot (1 + m_T) \approx 1 + m_T - m_e, \quad (31)$$

also

$$s_E = s_T \cdot (1 + m_T - m_e). \quad (32)$$

Für die Strecken heißt das, dass der Einfluss der zu erwartenden Netzmaßstäbe m_T von etwa +8 ppm bis +18 ppm (entspricht mm/km) um den Einfluss der Ellipsoidlagerung m_e von etwa +7,2 mm/km gemindert wird.

Abermals der Übergang zur Fläche ergibt mit F_E als ellipsoidischer Fläche im ETRS89 und F_T als mit dem Netzmaßstab behafteter ellipsoidischer Fläche im DHDN90:

$$a_E = a_T \cdot (1 + m_T - m_e), \quad (33a)$$

$$b_E = b_T \cdot (1 + m_T - m_e), \quad (33b)$$

$$F_E = a_E \cdot b_E = a_T \cdot b_T \cdot (1 + m_T - m_e)^2 \approx F_T \cdot (1 + 2 \cdot (m_T - m_e)) \quad (34a)$$

oder

$$F_E = F_T + V_K \text{ mit} \quad (34a)$$

$$V_K \approx F_T \cdot 2 \cdot (m_T - m_e) [\text{mm/km}] \cdot 10^{-6}. \quad (34b)$$

Nun ist der Einfluss m_e der Ellipsoidlagerung verhältnismäßig einfach und genau zu bestimmen. Dagegen wird es kaum möglich sein, einen Netzmaßstab von kleinräumigen Netzspannungen zu trennen. Im Folgenden werden fünf Versuchsreihen zur Ermittlung eines Netzmaßstabes im Netz77 beschrieben. Dazu wurden fünf TK25 ausgewählt, die den Wertebereich des Meters des TP-Feldes größtenteils abdecken.

Für die erste Versuchsreihe wurden die Maßstabsverbesserungen m_T aus der Beilage zu Klugmann (1992) für die fünf ausgewählten TK25 abgeschätzt. Um Vergleichswerte für die anderen Versuchsreihen zu erhalten, werden die Einflüsse der Ellipsoidlagerung der Tab. 2 entnommen und in Tab. 4 $m_T - m_e$ gebildet.

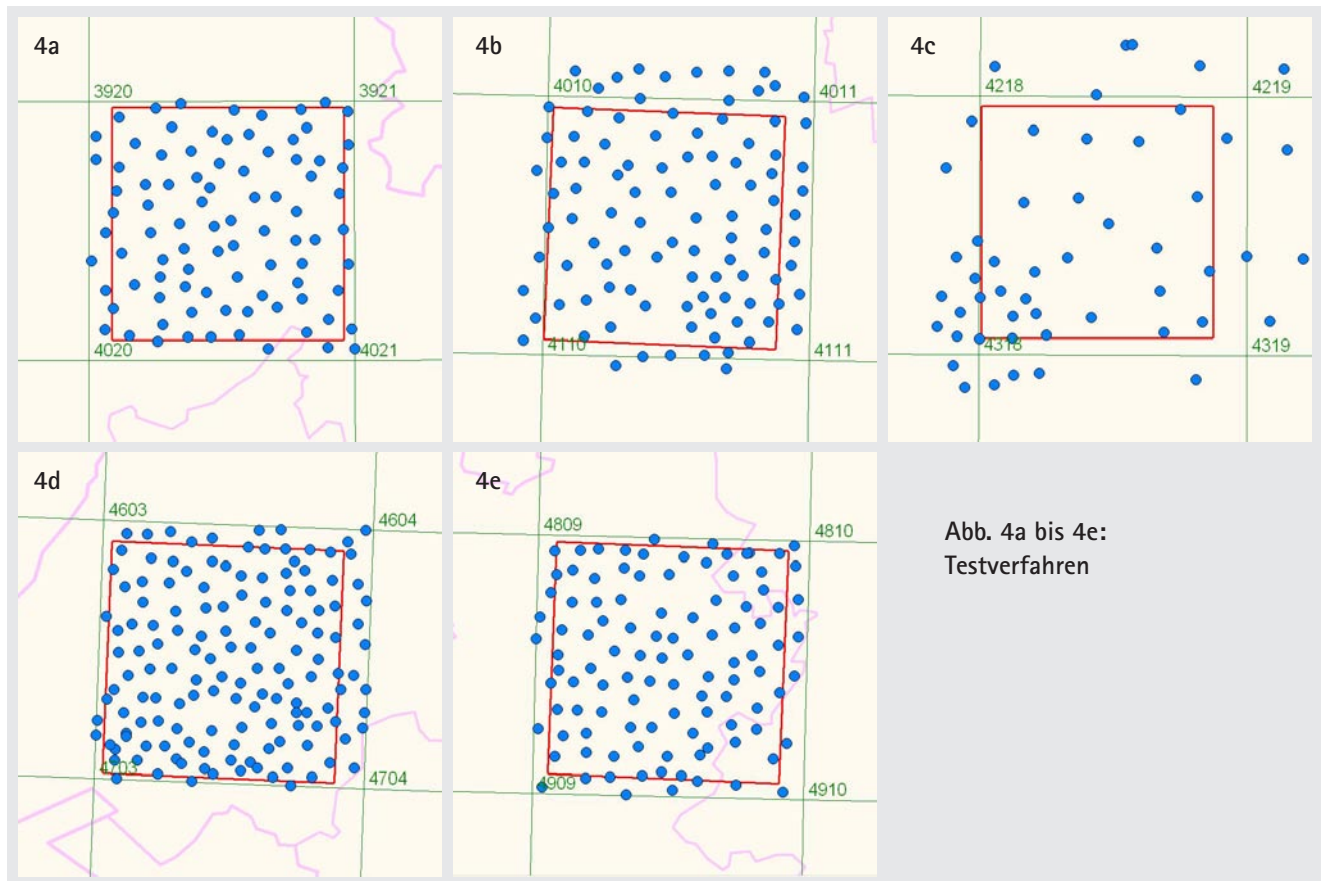
Bei der zweiten Versuchsreihe wurden die Netzmaßstäbe Verdichtungen des TP-Netzes 4. Ordnung entnommen. War die TK25 von zwei Arbeiten betroffen, wurden die Maßstabswerte mit der Anzahl der TP auf der TK25 gemittelt. Im Einzelnen wurden herangezogen:

- für die TK25 Nr. 4020: NT Blomberg (1998.76, 50TP) und NT Barntrup (1996.57, 22),
- für 4110: NT Senden-Ost (1995.22, 35) und NT Buldern (1999.116, 34),
- für 4318: NT Etteln (1996.51, 58),
- für 4703: NT Amern (1997.48, 62) und NT Bracht (1995.13, 27),
- für 4909: NT Kürten (1990.44, 85) und NT Blecher (1992.43, 22).

Alle Arbeiten bis auf NT Blomberg und NT Barntrup, die mit dem Programm GePoS berechnet wurden, waren KATRIN-Verfahren. Die ermittelten Netzmaßstäbe m_T wurden in Tab. 4 ebenfalls mit dem Einfluss der Ellipsoidlagerung m_e zusammengefasst.

Als dann wurden für die fünf TK25 Stützpunkte mit Koordinaten im Netz77 und im ETRS89 gesucht. Im Allgemeinen handelte es sich um TP 4. Ordnung. Mit dem Programm TRABBI-EDBS wurden die Transformationsparameter berechnet. Da nach dem nordrhein-westfälischen Berechnungsansatz die Parameter frei von den Abbildungsverzerrungen sind, müsste sich der Transformationsmaßstab aus den großräumigen Spannungen im Netz77 ergeben, aber auch den Einfluss der Ellipsoidlagerung enthalten. Umgerechnet in mm/km wird die Maßstabsverbesserung als $(m_T - m_e)$ in Tab. 4 eingesetzt.

In die Stützpunktfelder der dritten Versuchsreihe wurden achsparallel im DHDN90/GK Quadrate von

Abb. 4a bis 4e:
Testverfahren

10km · 10km gelegt und die Eckpunkte (zusammen mit den Schwerpunkten für die Abbildungsreduktionen) in das ETRS89/UTM transformiert. Die Lagerestklaffungen in den Stützpunkten betrugen maximal 7cm. Sie wurden mit der Natural Neighbour Interpolation auf die umgeformten Punkte übertragen. Geringfügige Extrapolationen waren in Kauf zu nehmen. Die durchschnittliche Stützpunktdichte betrug etwa 2km; die nachbarschaftsbezogenen Restklaffungen (Ahrens 2005) lagen im Mittel bei 1,5cm, 88% blieben unter 3cm. Die größten Werte von 8cm bis 11cm traten u. a. auch in den Randbereichen auf. Die Flächen der umgeformten Quadrate, nunmehr beliebige Vierecke, wurden ohne Abbildungsentzerrung aus den UTM-Koordinaten mit dem Programm DIVA abgeleitet. Die Flächen wurden für Tab. 3a der Abbildungsentzerrung nach Formel (13) unterzogen, ebenso die Ausgangsflächen im DHDN90/GK. Aus dem Verhältnis der ellipsoidischen Flächen im ETRS89 und im Netz77 wurde in Umkehrung der Formel (34) die Maßstabsverbesserung ($m_T - m_e$) für Tab. 4 berechnet.

Um den Einfluss der Spannungen in den Stützpunkten zu berücksichtigen, die zwischen den Eckpunkten der Quadrate liegen, wurden schließlich die Seiten der Quadrate im DHDN90/GK in jeweils zehn Strecken von je einem Kilometer unterteilt. Die Zwischenpunkte wurden ebenfalls transformiert. Die ursprünglichen Quadrate bildeten transformiert nunmehr vierzigseitige geschlossene

Polygone, deren Flächen ebenso berechnet und abbildungsentzerrt wurden. Auch hier wurde aus dem Verhältnis der ellipsoidischen Flächen die Maßstabsverbesserung ($m_T - m_e$) abgeleitet.

Die Ergebnisse für die Einflüsse ($m_T - m_e$) wurden für alle fünf Versuchsreihen in Tab. 4 zusammengestellt. Alle Zahlen, die zu den Ergebnissen geführt haben, liegen vor, ihre Veröffentlichung im Einzelnen würde aber den Rahmen dieses Fachbeitrages sprengen.

Tab. 4 zeigt bereits Differenzen bis zu einem Millimeter pro Kilometer zwischen den Maßstabsverbesserungen, die aus den transformierten Vierecken oder den Polygonen berechnet wurden. Auf eine Fläche wie hier von 10km · 10km betragen die Auswirkungen bis zu 200m². Da bei einer solchen Flächengröße sich die inneren kleinräumigen Spannungen weitgehend aufheben, sind sie den Deformationen in den Nachbarschaften der äußeren Stützpunkte anzulasten. Daraus ist zu schließen, dass ein Vergleich selbst von großen Flächen oder Flächensummen vor und nach der Überführung nur mit Tolerierung unsystematischer Anteile möglich sein wird.

Vor diesem Hintergrund können alle Ansätze nur zu einer Schätzung der Flächenänderungen herangezogen werden. Die Größe der Differenzen und ihre unterschiedlichen Vorzeichen unterstützen aber die These, dass die Flächenänderungen im Wesentlichen durch die Komponenten Netzmaßstab und Ellipsoidlagerung hervorgerufen werden.

Tab. 3a: Berechnung der Vergleichsflächen aus vier Eckpunkten

TK25 Nr.	Anzahl Stütz- punkte	Netz77				ETRS89		
		y _M		Fläche GK	Fläche ellipsoidisch	y _M	Fläche 4 Punkte transformiert UTM	Fläche 4 Punkte transformiert ellipsoidisch
		Streifen		m ²	m ²	Zone 32 km	m ²	m ²
4020	88	3	6,0	100000000	99999912	5,925	99920611	100000509
4110	74	2	97,0	100000000	99976896	-109,721	99928099	99978545
4318	26	3	-18,0	100000000	99999204	-18,066	99920181	99999364
4703	143	2	17,0	100000000	99999290	-192,430	100011559	100000710
4909	105	2	87,5	100000000	99981413	-122,853	99939281	99982239

Tab. 3b: Berechnung der Vergleichsflächen mit Zwischenpunkten

TK25 Nr.	Anzahl Stütz- punkte	Netz77				ETRS89		
		y _M		Fläche GK	Fläche ellipsoidisch	y _M	Fläche 40 Punkte transformiert UTM	Fläche 40 Punkte transformiert ellipsoidisch
		Streifen		m ²	m ²	Zone 32 km	m ²	m ²
4020	88	3	6,0	100000000	99999912	5,925	99920681	100000580
4110	74	2	97,0	100000000	99976896	-109,721	99928159	99978605
4318	26	3	-18,0	100000000	99999204	-18,066	99919975	99999157
4703	143	2	17,0	100000000	99999290	-192,430	100011753	100000904
4909	105	2	87,5	100000000	99981413	-122,853	99939380	99982338

Der Aufwand für eine Recherche in älteren Unterlagen mit flächenhaften Ausgleichungen im Netz77 erscheint durch die Ergebnisse als wenig gerechtfertigt. Größere Übereinstimmung zeigt dagegen der Ansatz mit dem Transformationsparameter aus der Umformung, der bei der Überführung ohnehin ermittelt wird. Bestätigt wird in Tab. 4 aber auch die Größenordnung der Maßstabsverbesserungen, die schon im TP-Netz 2. Ordnung festgestellt wurden. Sie weichen um nicht mehr als 2 mm/km von den Ergebnissen der anderen Versuchsreihen ab

und können daher als Grundlage für die weitere Überlegung dienen:

Bei den vorgegebenen Extremwerten für m_T von 8 bis 18 mm/km und einem durchschnittlichen Einfluss der Ellipsoidlagerung von 7,2 mm/km nimmt V_K nach Formel (34) Werte zwischen $+1,6 \cdot 10^{-6}$ und $+2,2 \cdot 10^{-5}$, +0,0016 bis +0,022 Promille der Flächengröße an. Bezogen auf einen Hektar betragen diese Werte 0,02 m² bis 0,22 m². Sie können als systematische Einflüsse des Datumsübergangs gewertet werden.

Tab. 4: Maßstabsverbesserungen aus fünf Versuchsreihen

TK25 Nr.	m_e	m_T 2. Ordnung	m_T 4. Ordnung	$m_T - m_e$ 2. Ordnung	$m_T - m_e$ 4. Ordnung	$(m_T - m_e)$ aus Transf.	$(m_T - m_e)$ aus Fläche 4 Punkte	$(m_T - m_e)$ aus Fläche 40 Punkte
	mm/km	mm/km	mm/km	mm/km	mm/km	mm/km	mm/km	mm/km
4020	7,0	8,8	10,3	1,8	3,3	3,2	3,3	3,0
4110	7,0	13,9	14,6	6,9	7,6	8,6	8,5	8,2
4318	7,1	9,2	11,1	2,1	4,0	0,7	-0,2	0,8
4703	7,1	16,2	15,3	9,1	8,2	7,3	8,1	7,1
4909	7,3	13,0	13,7	5,7	6,4	5,8	5,7	5,2

Um mit diesen Ansätzen eine Prognose für ganz Nordrhein-Westfalen zu erstellen, wurde zunächst die Landesfläche aus Gauß-Krüger-Koordinaten bestimmt. Als einheitliche Koordinaten für die Landesgrenze wurde vereinfacht die Digitalisierung aus dem Maßstab 1:200.000 herangezogen sowie die Anzahl der Grenzpunkte auf etwa 2000 reduziert. Die mit dem Schwerpunkt nach Spata (2007) auf das DHDN90-Ellipsoid zurückgerechnete Fläche beträgt $34106,71 \text{ km}^2$ (demgegenüber wird die »Katasterfläche nach der tatsächlichen Art der Nutzung« für den Stichtag 31.12.2007 mit $34086,5 \text{ km}^2$ ausgewiesen, Landesamt für Datenverarbeitung und Statistik NRW 2008). Werden die Grenzpunkte mit dem landesweiten Transformationsmodell 2007 (211 Punkte überwiegend des NWREF-Netzes) in das ETRS89 umgeformt, aus den UTM-Koordinaten die Fläche abgeleitet und diese auf das ETRS89-Ellipsoid zurückgerechnet, erhält man $34107,19 \text{ km}^2$. Das entspricht einer Maßstabsverbesserung ($m_T - m_e$) von $7,0 \text{ mm/km}$.

Die Maßstabsverbesserung ($m_T - m_e$) aus der Transformation, ebenfalls nach dem nordrhein-westfälischen Berechnungsansatz durchgeführt, beläuft sich auf $5,664 \text{ mm/km}$. Das ergibt nach Formel (34) eine Fläche von $34107,10 \text{ km}^2$. Setzt man schließlich als m_T für ganz Nordrhein-Westfalen die bekannte Differenz von $13,355 \text{ mm/km}$ zwischen dem legalen und dem internationalen Meter an, die als Ursprung des Netzmaßstabes im DHDN90 (West) gesehen wird, und $7,2 \text{ mm/km}$ als mittleren Einfluss der Ellipsoidlagerung m_e , so ergeben sich $34107,13 \text{ km}^2$. Die Näherungsverfahren zeigen also im oben aufgeführten Rahmen Übereinstimmung mit der strengeren Lösung.

Danach wird sich die Landesfläche, in beiden Bezugssystemen aus Koordinaten berechnet und abbildungsentzerrt, lediglich um $0,48 \text{ km}^2$ – etwa 48 Fußballplätze von einem Hektar also – vergrößern. Ein einzelner Sportplatz von einem Hektar würde aber durchschnittlich nur um $0,14 \text{ m}^2$ größer werden. Um die »sportlichen« Zahlenspielerien weiter zu treiben: Mit $0,14 \text{ m}^2$ könnte die 100-Meter-Bahn beidseitig um sieben Zehntelmillimeter verbreitert werden!

Abschließend bietet sich ein konkreter Vergleich mit den amtlichen Fehlergrenzen an. Dazu wird die engste Fehlergrenze A1 für die Flächenermittlung nach dem Fortführungserlass NRW (Innenministerium NRW 2004b), VIII. Tafel, herangezogen (»... aus Koordinaten hoher Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Lagegenauigkeitsstufen H und 1«):

$$DF = 0,0002 \cdot F + 0,1 \cdot \sqrt{F}.$$

Es ist festzustellen, dass die zulässige lineare Abweichung etwa eine Zehnerpotenz größer ist als die maximal aus

systematischen Einflüssen bei der Überführung zu erwartenden Flächenänderungen.

Die Voraussetzungen für die zufälligen Anteile an den Fehlergrenzen ändern sich auch in Zukunft nicht, so dass die Vorschriften des Fortführungserlasses für alle Berechnungsarten auch bei und nach der Überführung ins ETRS89 zum Tragen kommen können.

Die Abweichungen in den Eröffnungsbilanzen bei der Migration in das ALKIS unter gleichzeitiger Überführung in das ETRS89 werden wohl stets individuell für jedes Überführungsverfahren zu werten sein. Die Fehlergrenze A1 mag dabei als Anhalt dienen, um den Toleranzraum einzugrenzen.

7 Fazit

In Nordrhein-Westfalen beziehen sich die im Liegenschaftskataster nachgewiesenen Flächen nach der Überführung in das Bezugssystem ETRS89 auf die Oberfläche des GRS80-Ellipsoides in der Lagerung des ETRS89. Bei den aus UTM-Koordinaten abgeleiteten Flächen ist die durch die Abbildung eingetretene Flächenverzerrung rückgängig zu machen. Weitere Reduktionen sind bei der Flächenberechnung auch zukünftig nicht zu berücksichtigen.

Bei Absteckungsberechnungen nach Sollflächen ist zu unterscheiden: Wird die Sollfläche als ellipsoidische Größe vorgegeben, ist für eine Berechnung der Sollpunkte im UTM-Koordinatensystem die Fläche der Abbildungsreduktion zu unterziehen. Bei der Vorgabe einer Sollfläche in Geländehöhe sind die Höhenreduktion auf das ETRS89-Ellipsoid sowie die Abbildungsreduktion anzubringen. Sofern die Absteckung nicht instrumentenunterstützt aus den UTM-Koordinaten der Sollpunkte erfolgt, sind die aus Koordinaten ermittelten Absteckmaße über die ellipsoidischen Strecken auf die Geländehöhe über dem ETRS89-Ellipsoid zurückzurechnen.

Die Änderungen von ellipsoidischen Flächen im ETRS89 gegenüber den Flächen im DHDN90 lassen sich bei lokalen Spannungen im Startsystem nicht quadrategenau prognostizieren. Diese zufälligen Fehleranteile können auch am Rand großer Flächen auftreten und sich dadurch bestimmend auswirken. Systematische Einflüsse auf die Änderungen sind im Wesentlichen durch Maßstabsabweichungen hervorgerufen, die in den bisherigen Gauß-Krüger-Koordinaten verborgen sind. Sie werden zum Teil durch die Lagerung des ETRS89-Ellipsoides unter dem DHDN90-Ellipsoid aufgehoben.

Die systematischen Anteile können anhand von Faustformeln abgeschätzt werden. Zu erwarten sind Vergrößerungen bis etwa $2,2 \cdot 10^{-5}$ der Flächengröße, die weit unter den linearen Anteilen aller amtlichen Fehlergrenzen bleiben. Für die jeweils aus Koordinaten abgeleitete und entzerrte Fläche von ganz Nordrhein-Westfalen ist durch

die Einflüsse von Netzmaßstab und Ellipsoidlagerung ein Zuwachs von etwa $0,5 \text{ km}^2$ zu erwarten.

Wegen der geringen systematischen Einflüsse ist eine erhebliche Verbesserung der Flächenangaben im Liegenschaftsbuch durch eine Neuberechnung nach der Überführung nur zu erwarten, wenn mit einer ausreichenden Stützpunktdichte die Koordinatenqualität eines spannungsbeladenen Katasters nachhaltig verbessert wird. Selbstverständlich kann die Überführung den Anlass liefern, die bisherigen, möglicherweise noch grafisch oder halbgrafisch ermittelten Buchflächen zu ersetzen. Bei Flächen, die bereits aus Koordinaten eines spannungsfreien Katasters berechnet wurden, werden jedoch nach dem Datumsübergang keine wesentlichen Änderungen auftreten.

Literatur

- Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen der Länder der Bundesrepublik Deutschland (AdV): Richtlinien für die elektromagnetische Distanzmessung im Hauptdreiecksnetz (EDM-Richtlinien), 3. Auflage, Hessisches Landesvermessungsamt, Wiesbaden, 1982.
- Ahrens, B.: Ein Algorithmus zur Restklaffenverteilung mit der Natural Neighbour Interpolation, *Der Vermessungsingenieur*, 4/2004, S. 286–290.
- Ahrens, B.: Restklaffenanalyse unter Berücksichtigung der Nachbarschaft – Anmerkungen zur Veröffentlichung Fröhlich/Vogt in Heft 3, S. 220, *Der Vermessungsingenieur*, 4/2005, S. 292.
- Hettwer, J. und Benning, W.: Restklaffenverteilung mit der Natural-Neighbour-Interpolation, *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 4/2003, S. 122–129.
- Innenministerium NRW: Das Verfahren bei den Fortführungsvermessungen in Nordrhein-Westfalen – Fortführungsvermessungserlass – (FortfVErl.) vom 23. März 2000, Landesvermessungsamt Nordrhein-Westfalen, Bonn, 2000.
- Innenministerium NRW (2004a): Die Führung des Punktnachweises der digitalen Liegenschaftskarte in Nordrhein-Westfalen – Punktnachweiserlass NRW – vom 2. Januar 2001, i.d.F. vom 17. Juni 2005, www.lverma.nrw.de/produkte/verwaltungsvorschriften/Verwaltungsvorschriften.htm.
- Innenministerium NRW (2004b): Das Verfahren bei der Fortführung des Liegenschaftskatasters in Nordrhein-Westfalen – Fortführungserlass – (FortfVErl.) vom 18. Oktober 1990, i.d.F. vom 14. Dezember 2004, www.lverma.nrw.de/produkte/verwaltungsvorschriften/Verwaltungsvorschriften.htm.
- Landesamt für Datenverarbeitung und Statistik NRW (2008): Katasterfläche nach der tatsächlichen Art der Nutzung, www.landesdatenbank.nrw.de.
- Jahn, C.-H., Stegelmann, V.: Einführung des Bezugssystems ETRS89 und der UTM-Abbildung beim Umstieg auf AFIS, ALKIS und ATKIS, *Nachrichten der Niedersächsischen Vermessungs- und Katasterverwaltung*, 1+2/2007, S. 26–35.
- Klugmann, H.-J.: Übersicht der Maßstabsfaktoren im Netz 77 1. und 2. Ordnung von Nordrhein-Westfalen, *Nachrichten aus dem Öffentlichen Vermessungsdienst Nordrhein-Westfalen*, 1/1992, S. 18–22.
- Kühbach, T.: Die Einführung neuer amtlicher Flächen aus dem Grundrissnachweis beim Umstieg nach ALKIS und dem gleichzeitigen Lagebezugswechsel nach ETRS89/UTM, *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 6/2007, S. 360.
- Landesvermessung und Geobasisinformation Niedersachsen: Formelsammlung unter Berücksichtigung des amtlichen Bezugssystems ETRS89 mit UTM-Abbildung, Stand vom 06.02.2007, http://cdl.niedersachsen.de/blob/images/C34639937_L20.pdf.
- Ministerium des Innern des Landes Brandenburg: Verwaltungsvorschrift zur Durchführung von Liegenschaftsvermessungen (Liegenschaftsvermessungsvorschrift – VVLiegVerm) i.d.F. vom 20. September 2007, www.mi.brandenburg.de/sixcms/media.php/1071/83002700.pdf.
- Schödlbauer, A.: Rechenformeln und Rechenbeispiele zur Landesvermessung, Teil 2, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1982.
- Spata, M., Ahrens, B., Günther, G., Irsen, W. und Ruf, B. (2001a): Die Verknüpfung ellipsoidischer Höhen und Landeshöhen durch Undulationen – Neues NN-Undulationsmodell 2000, *Nachrichten aus dem Öffentlichen Vermessungsdienst Nordrhein-Westfalen*, 1/2001, S. 59–67.
- Spata, M. (2001b): UTM-Reduktionsfaktoren zur vereinfachten Streckenreduktion in NRW, *Nachrichten aus dem Öffentlichen Vermessungsdienst Nordrhein-Westfalen*, 1/2001, S. 51–55.
- Spata, M. (2007): Der geographische Mittelpunkt von Nordrhein-Westfalen, www.lverma.nrw.de/nrw/NRW_Daten.htm.
- www.lverma.nrw.de/produkte/programme/...: Anwendungshandbücher der Programme TRABBI-EDBS, TRABBI-2D, KATRIN u.a.

Anschrift des Autors

Dipl.-Ing. Burckhardt Ahrens
c/o Bezirksregierung Köln
Dezernat 71 – Datenstandards, Raumbezug
Muffendorfer Straße 19–21, 53177 Bonn
burckhardt.ahrens@bezreg-koeln.nrw.de