Discounted-Cash-Flow-Verfahren – Analyse des Diskontierungszinssatzes

Michael Mürle und Günter Schmitt

Zusammenfassung
Mit der Aufnahme sonstiger bislang nicht normierter Verfahrensvarianten wie das Discounted-Cash-Flow-Verfahren (DCF-Verfahren) in die Wertermittlungsverordnung (WertV) entsteht der Bedarf der Ableitung der durchschnittlichen marktüblichen Verzinsung des Verkehrswerts von Investmentobjekten. Für die Analyse der Diskontierungszinssätze, die auf Grundlage geeigneter Kaufpreise nach den Grundsätzen des Ertragswertverfahrens erfolgen soll, werden die Lösungsalgorithmen zur Nullstellenbestimmung von Polynomen benötigt. Die Nullstellensuche nach *Newton* mittels Taylor-Reihenentwicklung bildet als iterative Lösungsbeziehung einen Schwerpunkt in diesem Artikel. Eine automatisierte Lösung zur Ermittlung aller Nullstellenlösungen wird ergänzend vorgestellt. Die vorherrschende Fachmeinung zu Auswirkungen von mehrmaligen Vorzeichenwechseln bei den periodischen Überschüssen auf die eindeutige Lösbarkeit des Diskontierungszinssatzes wird nachweislich widerlegt.

Summary
With the acceptance of other up to now not standardised method models as the Discounted Cash Flow Method in the Valuation Ordinance the need to evaluate the average usual market rate for the market value of investment properties emerges. For the analysis of discounting yields, which should be derived from qualified purchase prices according the principles of the Capitalization Method, the formulae to analyse the roots of polynomials have to be evaluated. This paper focuses on an iterative solution method to find roots according to Newton *by Taylor-Series Expansion. An automated solution to analyse all root solutions is additionally presented. The prevailing opinion among experts on the implication of repeated changes of sign by periodic surpluses on the definite solubility of the discounting yield will be demonstrably disproved.*

1 Problemstellung

Das vom Bundesministerium für Verkehr, Bau und Stadtentwicklung (BMVBS) einberufene Sachverständigengremium hat in seinem Anfang des 2. Quartals 2008 veröffentlichten Bericht zur Überprüfung des Wertermittlungsrechts ausgeführt, dass es insbesondere bei Investmentobjekten mit veränderlichen Nutzungseinheiten und unterschiedlichen Vertragslaufzeiten sinnvoll sein kann, den Ertragswert auf der Grundlage periodisch unterschiedlicher Erträge zu ermitteln. Es handelt sich allerdings beim DCF-Verfahren nicht um ein einheitlich normiertes, sondern um ein in verschiedenen Varianten praktiziertes Verfahren (BMVBS 2008). Eine Regelung sollte daher einerseits flexibel formuliert, andererseits aber darauf ausgerichtet sein, den für die Zwecke der Verkehrswertermittlung notwendigen Rahmen zu setzen.

Der Formulierungsvorschlag zum DCF-Verfahren lautet: *Im Ertragswertverfahren auf der Grundlage periodisch unterschiedlicher Erträge wird der Ertragswert aus den durch gesicherte Daten abgeleiteten periodisch erzielbaren Reinerträgen innerhalb eines Betrachtungszeitraums und dem Restwert des Grundstücks am Ende des Betrachtungszeitraums ermittelt. Die periodischen Reinerträge sowie der Restwert des Grundstücks sind jeweils auf den Wertermittlungsstichtag abzuzinsen.*

Zur Abzinsung ist ein Diskontierungszinssatz einzuführen. Der einheitliche marktgerechte Diskontierungszinssatz kann als interner Zinsfuß direkt aus Kaufpreisen (Beobachtungen) vergleichbarer Immobilien abgeleitet werden. Alternativ kann der Diskontierungszinssatz auf Grundlage des Diskontierungszinssatzes bei anderen Anlageformen abgeleitet werden.

2 DCF-Verfahren

Der Betrachtungszeitraum für das DCF-Verfahren soll höchstens zehn Jahre betragen. Ein wichtiges Kriterium für die Bemessung ist die Laufzeit der Mietverträge. Der Restwert ergibt sich regelmäßig im allgemeinen Ertragswertverfahren aus den nachhaltigen Erträgen sowie dem Bodenwert. Damit handelt es sich beim DCF-Verfahren im Wesentlichen um eine alternative Darstellungsweise. Veränderungen der Erträge werden beim DCF-Verfahren zunächst in unterschiedlichen Perioden dargestellt und anschließend die nachhaltigen Erträge berücksichtigt.

Über sonstige Bestrebungen zur Standardisierung des DCF-Verfahrens hat bereits Forkert (2007) berichtet. Verschiedene Institutionen wie die Gesellschaft für immobilienwirtschaftliche Forschung e.V. (gif e.V.) und der Bundesverband der Immobilien-Investment-Sachverständigen e.V. (BIIS) haben Konzepte hierzu entwickelt und vorgelegt.

Ziel des BIIS-Vorschlags war es, ein marktorientiertes Verfahren zu entwickeln, welches konsequent auf den Grundsätzen des Ertragswertverfahrens nach der WertV und der BelWertV aufsetzt und somit die Vorzüge des DCF-Verfahrens mit den Forderungen der deutschen Wertermittlungspraxis vereinen soll.

Die gif e.V. hatte nicht die Konformität mit der WertV zum Ziel, ihr ging es lediglich darum, einen Standard zu entwickeln, welcher die Anwendung von DCF-Verfahren erleichtert und besser nachprüfbar macht. Zur Vorgehensweise wird empfohlen, die Überschüsse für die periodische Betrachtung des DCF-Verfahrens aus den Vollständigen Finanzplänen (VOFI), die z.B. im Rahmen von Basel II zur Transparenz der zukünftigen Geldflüsse des Immobilienbestandes ohnehin vorliegen, zu übernehmen (gif e.V. 2006).

2.1 Modellbildung

Das DCF-Verfahren wird üblicherweise durch einen periodischen Anteil mit einem Betrachtungszeitraum von 10 (bis 15) Jahren und die nachfolgende Ermittlung eines Restwertes beschrieben. Innerhalb der Detailphase werden die Einnahmen und Ausgaben zu einem Netto-Zahlungsstrom auf Jahresbasis zusammengefasst. Zu den positiven Einnahmen zählen die Mieten, die Verwaltungskostenumlage bei Gewerbeimmobilien und Sondereinnahmen (z.B. Einnahmen aus Werbeflächen, Mobilfunkantennen). Fehlende Einnahmen resultieren aus dem Mietausfall. Zu den Ausgaben zählen die Bewirtschaftungskosten, wegen Leerstand nicht umlagefähige Betriebskosten, aufgrund von Mietverträgen nicht umlegbare umlagefähige Betriebskosten, Modernisierungs- und/oder Instandsetzungskosten sowie Kosten bei Mieterwechseln (Umbau- und Vermarktungskosten). Für den Cashflow wird ein nachschüssiges Modell unterstellt. Der Marktwert ergibt sich zu

$$MW = Wert = \frac{E_1 - A_1}{q^1} + \frac{E_2 - A_2}{q^2} + \ldots + \frac{E_n - A_n}{q^n} + \frac{R}{q^n}\,. \quad (1)$$

MW Marktwert
E_i Einnahmen im Jahr i (nachschüssig), fehlende Einnahmen werden gleichfalls berücksichtigt
A_i Ausgaben im Jahr i (nachschüssig)
R Restwert
p Diskontierungszinssatz
q Diskontierungsfaktor $q = 1 + p$ (2)
n periodischer Betrachtungszeitraum, häufig 10 Jahre

Die Ableitung des Restwertes R über den Rohertragsfaktor (gif e.V. 2006), das statische Ertragswertverfahren (BIIS 2006) oder ggf. als Barwert einer ewigen Rente erlaubt methodisch eine vollständige Trennung zwischen dem DCF-Verfahren für den periodischen Betrachtungszeitraum und dem gewählten Wertermittlungsverfahren für die anschließende Restnutzungsdauer der Immobilie. Mit statischem Ertragswertverfahren ist hierbei das allgemeine bzw. erweiterte Ertragswertverfahren gemeint. Kann der Immobilie nach Ablauf des periodischen Betrachtungszeitraumes nur noch eine kurze wirtschaftliche Restnutzungsdauer zugestanden werden, so sollte die periodische Betrachtungsphase um diesen Zeitraum erweitert werden. Der Restwert ergibt sich dann aus Bodenwert abzüglich der Abrisskosten (gif e.V. 2006).

2.2 Diskontierungszinssatz

Der einheitliche marktgerechte Diskontierungszinssatz kann als interner Zinsfuß direkt aus Kaufpreisen (Beobachtungen) vergleichbarer Immobilien abgeleitet werden. Ziel ist es dabei, anhand der Barwertformel den internen Zinssatz zu berechnen, bei dem die Summe aller diskontierten Reinerträge zuzüglich des diskontierten Restwertes gleich dem vorliegenden Kaufpreis(angebot) einer Immobilie ist (Forkert 2007). Alternativ kann der Diskontierungszinssatz auf Grundlage des Diskontierungszinssatzes bei anderen Anlageformen abgeleitet werden.

Die Modellbildung des BIIS geht, um das Ziel der WertV-Konformität des DCF-Modells zu erreichen, davon aus, dass als Diskontierungszinssatz der Liegenschaftszinssatz verwendet wird. Auf die Ausführungen zur Anwendbarkeit des Liegenschaftszinssatzes in Forkert (2007) wird verwiesen.

Als Formulierung zur Ermittlung des Kapitalisierungszinssatzes (neuer Begriff für den internationalen Sprachgebrauch anstatt Liegenschaftszinssatz) wird vom BMVBS (2008) vorgeschlagen:
Die durchschnittliche marktübliche Verzinsung des Verkehrswerts von Grundstücken soll mit den im Geschäftsverkehr zugrunde gelegten Kapitalisierungszinssätzen (Liegenschaftszinssätzen) erfasst werden. Sie sind auf der Grundlage geeigneter Kaufpreise und der ihnen entsprechenden nachhaltig erzielbaren Reinerträge für gleichartig bebaute und genutzte Grundstücke unter Berücksichtigung der Restnutzungsdauer der Gebäude nach den Grundsätzen des Ertragswertverfahrens zu ermitteln.

Für eine Marktableitung des Diskontierungszinssatzes sind unterschiedliche Lösungsansätze möglich. Hierbei kann nach einfachen iterativen und komplexen Modellbildungen unterschieden werden.

Ausgehend von der Beziehung zwischen Beobachtungen und Unbekannten

$$\hat{l} = l + v = A\hat{x} \quad (3)$$

für die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen wird der vereinbarte Kaufpreis KP als Beobachtung für die Analyse des Diskontierungszinssatzes eingeführt (Schmitt 2005a bis c).

$$KP = \frac{E_1 - A_1}{q^1} + \frac{E_2 - A_2}{q^2} + \ldots + \frac{E_{10} - A_{10}}{q^{10}} + \frac{R}{q^{10}}\,. \quad (4)$$

Die vollständige Ableitung der linearisierten Beobachtungsgleichung soll hier nicht weiterverfolgt werden. Die nachfolgend im Kap. 4.1 dargestellte Linearisierung der Funktion zur Nullstellenbestimmung mittels Taylor-Reihe 1. Ordnung kann dabei als wesentlicher Ansatz für ein Lösungsschema von (4) herangezogen werden. Im stochastischen Modell können zur Vereinfachung – zumindest zunächst – unkorrelierte, gleichgewichtige Beobachtungen unterstellt werden. Varianzinformationen für die Kaufpreise können Mürle (2007) entnommen werden.

Durch Umformung ergibt sich

$$KPq^{10} = (E_1 - A_1)q^9 + (E_2 - A_2)q^8 + \ldots + (E_9 - A_9)q^1 + (E_{10} - A_{10}) + R \quad . \tag{5}$$

Wird $x = q$ gesetzt und $f(x)$ eingeführt, so erhält man

$$f(x) = -KPx^{10} + (E_1 - A_1)x^9 + (E_2 - A_2)x^8 + \ldots + (E_8 - A_8)x^2 + (E_9 - A_9)x^1 + (E_{10} - A_{10}) + R \quad . \tag{6}$$

Die Analyse des Diskontierungszinssatzes kann damit als Problem der Bestimmung von Nullstellen der Funktion $f(x) = 0$ interpretiert werden.

3 Mathematische Grundlagen zur Nullstellenbestimmung

Zur Ableitung des Diskontierungszinssatzes im DCF-Modell soll folglich auf die Lösungsalgorithmen zur Ermittlung von Nullstellen von *ganzen rationalen Funktionen (Polynomen)* mit dem Grad n und den Koeffizienten a_k eingegangen werden. Je nachdem ob $a_n = 0$ verboten oder zugelassen ist, spricht man vom *genauen Grad* oder *Höchstgrad* (Weissinger 1977).

$$f(x) = 0 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \, . \tag{7}$$

Der Quotient zweier Polynome $f_m(x)$ und $g_n(x)$

$$R(x) = \frac{f_m(x)}{g_n(x)} \tag{8}$$

heißt rationale Funktion. $R(x)$ heißt eine *echt gebrochen rationale Funktion*, wenn der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist ($m < n$); andernfalls wird $R(x)$ als *unecht gebrochen* ($m \geq n$) bezeichnet. Eine *unecht gebrochen rationale Funktion* lässt sich stets darstellen als Summe eines Polynoms vom Grad ($m - n$) und einer *echt gebrochen rationalen Funktion*:

$$R(x) = q(x) + \frac{p(x)}{g_n(x)} \, . \tag{9}$$

Der Grad von $q(x)$ beträgt ($m - n$), der Grad von $p(x)$ ist $< n$. Einen Sonderfall liefert das *Hornerschema*.

3.1 Hornerschema

Für den Sonderfall des Polynoms

$$g_n(x) = (x - x_1) \tag{10}$$

erhalten wir mit etwas abgeänderten Bezeichnungen

$$\frac{f_n(x)}{x - x_1} = f_{n-1}(x) + \frac{a'_0}{x - x_1} \tag{11}$$

oder

$$f_n(x) = f_{n-1}(x)(x - x_1) + a'_0 \, . \tag{12}$$

Setzen wir nun $x = x_1$, so folgt

$$f_n(x_1) = a'_0 \, . \tag{13}$$

3.1.1 Allgemeines Anwendungsprinzip des Hornerschemas

Das nachstehende Schema wird als *Hornerschema* bezeichnet (Weissinger 1977).

Tab. 1: Hornerschema

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_1	a_0	
x_1		$x_1 a_n$	$x_1 a'_{n-1}$	$\ldots$	$x_1 a'_2$	$x_1 a'_1$	
	a_n	a'_{n-1}	a'_{n-2}	$\ldots$	a'_1	a'_0	$= f_n(x_1)$

Dabei entsprechen die a'_k den Summen der über ihnen stehenden Elemente. Es liefert den Funktionswert $f_n(x)$ an der Stelle $x = x_1$ und gleichzeitig die Koeffizienten a'_k des Polynoms $f_{n-1}(x)$, das durch Division durch ($x - x_1$) aus $f_n(x)$ entsteht.

Ist nun $f_n(x_1) = a'_0 = 0$, so ist

$$f_n(x) = f_{n-1}(x)(x - x_1) \, . \tag{14}$$

Dies bedeutet, $f_n(x)$ ist ohne Rest durch ($x - x_1$) teilbar, wenn x_1 eine Nullstelle (Wurzel der Gleichung $f_n(x) = 0$) ist. Schließlich kommt man zu der Produktdarstellung in allgemeiner Form

$$f_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \, \ldots \, (x - x_n) \tag{15}$$

und erhält den **Fundamentalsatz der Algebra**:
Eine ganze rationale Funktion von Grad n hat genau n Nullstellen (bzw. eine algebraische Gleichung n-ten Grades hat n Wurzeln).

Eine k-fach zählende Nullstelle $x_1 = x_2 = \ldots = x_k$ führt zu dem Faktor $(x - x_1)^k$. Man nennt k die *Vielfachheit* der Nullstelle (Weissinger 1977).

Komplexe Nullstellen treten stets paarweise konjugiert komplex auf, wenn das Polynom $f_n(x)$ reelle Koeffizienten hat. Dann sind die Faktoren $(x - \alpha)$ und $(x - \overline{\alpha})$ konjugiert komplex und haben ein reelles Produkt (reelle quadratische Polynome).

Besitzt die Funktion $f_n(x)$ r reelle Nullstellen $x_1, \ldots, x_r$ und $2m$ komplexe Nullstellen $\alpha_1, \overline{\alpha}_1, \ldots, \alpha_m, \overline{\alpha}_m$, wobei $r + 2m = n$ Wurzeln gilt, so lautet die Zerlegung nach dem *Fundamentalsatz der Algebra*

$$f_n(x) = a_n(x - x_1) \ \ldots \ (x - x_r)(x - \alpha_1)(x - \overline{\alpha}_1) \ \ldots \ (x - \alpha_m)(x - \overline{\alpha}_m) \quad . \qquad (16)$$

3.1.2 Ermittlung von Nullstellen mit dem Hornerschema

Das *Hornerschema* lässt sich auch zur Entwicklung eines Polynoms nach Potenzen von $(x - x_1)$ zur Ermittlung von Nullstellen heranziehen (Weissinger 1977). Nach dem ersten Schritt ergibt sich

$$f_n(x) = f_{n-1}(x)(x - x_1) + A_0 \qquad (17)$$

mit $A_0 = a_0^{'}$.

$f_{n-1}(x)$ lässt sich in gleicher Weise zerlegen

$$f_{n-1}(x) = f_{n-2}(x)(x - x_1) + A_1 \ , \qquad (18)$$

fortgesetzt bis zu

$$f_1(x) = a_n(x - x_1) + A_{n-1} \ . \qquad (19)$$

Setzt man ein, so erhält man

$$f_n(x) = a_n(x - x_1)^n + A_{n-1}(x - x_1)^{n-1} + A_{n-2}(x - x_1)^{n-2} + \ \ldots \ + A_1(x - x_1) + A_0 \quad . \qquad (20)$$

Zur Ermittlung von Nullstellen sei eine Näherungslösung x_0 der Gleichung $f_n(x) = 0$ bekannt. Mit Hilfe der Entwicklung der Gleichung nach Potenzen von $(x - x_0)$ kann der Wert verbessert werden.

$$f_n(x) = 0 = a_n(x - x_0)^n + A_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + A_{n-2}(x - x_0)^{n-2} + \ \ldots \ + A_1(x - x_0) + A_0 \qquad (21)$$

Die 2. Näherung $x_0^{'}$ kann aus der Approximation 1. Ordnung (Koeffizienten A_1, A_0) ermittelt werden zu

$$x_0^{'} = x_0 - \frac{A_0}{A_1} = x_0 - \frac{f_n(x_0)}{f_{n-1}(x_0)} \ . \qquad (22)$$

Weitere Lösungsalgorithmen wie der *Nullstellensatz von Weierstrass* und *Sekantenverfahren* bauen gleichfalls auf der Kenntnis eines Näherungswertes und der anschließenden Konvergenz der Folge der verbesserten Näherungswerte gegen die wahre Nullstelle auf.

3.2 Nullstellensatz von Weierstrass

Der *Nullstellensatz von Weierstrass* ist ein Spezialfall des *Zwischenwertsatzes*:
Ist die Funktion $f(x)$ stetig im Intervall $J = [a,b]$ und ist $f(a) < 0$ (bzw. $f(a) > 0$) und $f(b) > 0$ (bzw. $f(b) < 0$), so hat $f(x)$ mindestens eine Nullstelle in J.

Diese Nullstelle lässt sich mit Hilfe des Halbierungsverfahrens ermitteln. Ist x_0 der Mittelpunkt von J, so werde mit J' dasjenige der beiden durch Halbierung entstandenen Teilintervalle bezeichnet, in dessen Endpunkten $f(x)$ verschiedene Vorzeichen hat. Durch Halbierung von J' (Mittelpunkt $x_0^{'}$) entstehen zwei Intervalle, von denen dasjenige J'' heiße, in dessen Randpunkten $f(x)$ verschiedene Vorzeichen hat usw. Die Intervalle J, J', J'', ... bilden eine Intervallschachtelung, die sich auf die gesuchte Nullstelle zusammenzieht (Weissinger 1977).

3.3 Sekantenverfahren

Beim *Sekantenverfahren* nimmt man als Näherungswert der gesuchten Nullstelle den Schnittpunkt x_0 der Sehne zwischen zwei bekannten Kurvenpunkten mit der x-Achse. Dazu muss man als erstes die Funktionswerte $f(x_1)$ und $f(x_2)$ an zwei Stellen x_1 und x_2 berechnen, die nicht allzu weit von der wahren Nullstelle entfernt sein dürfen. Die Sehne wird beschrieben durch die Funktion einer Geradengleichung $s(x)$ durch die beiden Punkte $P_1\ (x_1 \mid f(x_1))$ und $P_2\ (x_2 \mid f(x_2))$.

$$s(x) = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2) \qquad (23)$$

Als Lösung von $s(x) = 0$ ergibt sich

$$x_0 = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \ . \qquad (24)$$

Der Wert x_0 kann weiter zu einem Wert $x_0^{'}$ verbessert werden, wenn man die Sehne zwischen x_2 und x_0 zum Schnitt mit der x-Achse bringt usw. (Weissinger 1977).

3.4 Eigenwerte

Das Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{25}$$

heißt homogen, wenn alle $b_i = 0$ sind. In Matrizenschreibweise: $Ax = b$ ist homogen, wenn $b = o$.

Das Gleichungssystem besitzt stets die triviale Lösung $x = o$. Ist der Rang r der Matrix A gleich n, so gibt es nur die Lösung $x = o$. Gilt jedoch $r < n$, so sind $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ beliebig wählbar. Ist die Determinante $\det A = 0$, so ist der Rang r von A gleichfalls $< n$ und es existieren nichttriviale Lösungen $x \neq o$ und umgekehrt (Weissinger 1978).

Ein Eigenvektor einer Abbildung ist in der linearen Algebra ein Vektor $x \neq o$, der durch eine Abbildung mit der Matrix A auf ein Vielfaches λ von sich selbst abgebildet wird. Jede Lösung $x \neq o$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ.

$$Ax = \lambda x \tag{26}$$

Die die Eigenwerte definierende Gleichung

$$(A - \lambda E)x = 0 \tag{27}$$

stellt ein homogenes lineares Gleichungssystem dar. Nichttriviale Lösungen $x \neq o$ liegen genau dann vor, wenn mit der Einheitsmatrix E eingeführt gilt

$$\det(A - \lambda E) = 0\,. \tag{28}$$

Entwickelt man die Determinante, so erhält man ein Polynom n-ten Grades in λ. Dieses wird als *charakteristisches Polynom* bezeichnet (Weissinger 1978).

$$P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \tag{29}$$

Die n Nullstellen sind die Eigenwerte, also die Lösungen des Gleichungssystems. In dieser Schreibweise entspricht a_{n-1} immer der Spur (= Summe der λ_i) und a_0 der Determinante (= Produkt der λ_i) der Matrix A. Der Eigenvektor $x \neq o$ (und alle seine Vielfachen) zum Eigenwert λ lässt sich aus (27) bestimmen.

Die Bestimmung von Nullstellen eines Polynoms kann somit wie die Lösung von Eigenwerten bzw. Eigenvektoren zu einer Abbildungsmatrix A über das charakteristische Polynom interpretiert werden.

4 Analyse des Diskontierungszinssatzes

Mit Hilfe der Linearisierung der zunächst nichtlinearen Funktion (umgeformte Beobachtungsgleichung nach (6)) lässt sich eine einfache, iterative Lösungsbeziehung für die Verbesserung der gewählten Näherung der Nullstelle erreichen. Man spricht hierbei auch von der *Nullstellensuche nach Newton* (Niemeier 2002).

4.1 Linearisierung mittels Taylor-Reihenentwicklung 1. Ordnung

Im eindimensionalen Fall (Diskontierungszinssatz) wird, ausgehend von einem Näherungswert x_0, an der die Funktion den Wert $f(x_0)$ besitzt, eine bessere Näherung für die gesuchte Nullstelle bestimmt, indem an der Näherungsstelle die 1. Ableitung der Funktion mit den Gliedern 1. Ordnung der Taylor-Reihenentwicklung gebildet wird. Die Konvergenz wird durch die Einbeziehung der jeweiligen 1. Ableitungsglieder des vollständigen Polynoms gegenüber den Lösungsverfahren, die einfach von einer Approximation 1. Ordnung ausgehen, verbessert werden.

Die Linearisierung von (6) mittels Taylor-Reihenentwicklung bis zur 1. Ordnung

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_0} dx \tag{30}$$

mit

x_0 Näherungswert und

dx Verbesserung $dx = x - x_0$ (31)

ergibt

$$\begin{aligned} 0 = {} & R + (E_{10} - A_{10}) + (E_9 - A_9)(x_0)^1 + \ldots + (E_2 - A_2)(x_0)^8 \\ & + (E_1 - A_1)(x_0)^9 - KP(x_0)^{10} \\ & + (E_9 - A_9)(x_0)^0\, dx + (E_8 - A_8)2(x_0)^1\, dx \\ & + (E_7 - A_7)3(x_0)^2\, dx + \ldots + (E_2 - A_2)8(x_0)^7\, dx \\ & + (E_1 - A_1)9(x_0)^8\, dx - KP10(x_0)^9\, dx \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & \sum_{i=1}^{n} [(E_i - A_i)(x_0)^{n-i}] + R - KP(x_0)^n \\ & + \left(\sum_{i=1}^{n-1} [(E_i - A_i)(n-i)(x_0)^{n-i-1}] - KPn(x_0)^{n-1}\right) dx \end{aligned} \tag{33}$$

$$dx = \frac{-(R - KP(x_0)^n + \sum_{i=1}^{n} [(E_i - A_i)(x_0)^{n-i}])}{\sum_{i=1}^{n-1} [(E_i - A_i)(n-i)(x_0)^{n-i-1}] - KPn(x_0)^{n-1}} \tag{34}$$

$$dx = \frac{KP(x_0)^n - R - \sum_{i=1}^{n} (E_i - A_i)(x_0)^{n-i}}{-KPn(x_0)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (E_i - A_i)(n-i)(x_0)^{n-i-1}} \tag{35}$$

Beispiel gif:	Standardisierung DCF-Verfahren mittels Taylorreihe 1. Ordnung									
	Ableitung des Diskontierungszinssatzes									
Periode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einnahmen	582.120 €	582.120 €	551.550 €	614.378 €	634.943 €	577.857 €	610.211 €	558.907 €	659.322 €	455.350 €
Ausgaben	38.220 €	38.628 €	91.427 €	53.981 €	49.799 €	133.472 €	79.426 €	109.414 €	74.173 €	188.051 €
Überschüsse	543.900 €	543.492 €	460.123 €	560.397 €	585.144 €	444.385 €	530.785 €	449.493 €	585.149 €	267.299 €
Kaufpreis €	7.840.858 €									
Restwert €	7.912.650 €									
Periode Jahre	10									
Diskontierungszinssatz % (Näherung)		5,50								
Diskontierungsfaktor (Näherung)		1,0550								
Verbesserung für Diskontierungszinssatz %		1,05								
Ergebnis Diskontierungszinssatz			6,55							
Ermittelter Marktwert (Näherung Diskontierungszinssatz)		8.426.025 €								
Marktwert - Kaufpreis		585.167 €								
Eingabefeld										
Ergebnisfeld										

Tab. 2: Ableitung des Diskontierungszinssatzes – Näherungswert und 1. Iteration (A3 gif e.V. 2006)

Die erste Näherung $x_0^{'}$ erhält man über die Beziehung

$$x_0^{'} = x_0 + dx, \tag{36}$$

die iterativ mit $x_0^{''} = x_0^{'} + dx^{'}$ usw. zur Annäherung an den wahren Diskontierungszinssatz p angewendet wird. Günstig wirkt sich hierbei die Einführung eines (zwangsläufig) numerisch guten Näherungswertes für den Diskontierungszinssatz über den Diskontierungsfaktor nach (2) aus. Es genügt, den Diskontierungsfaktor gleich Eins zu setzen.

4.2 Beispiel

Zur Unterstützung der Analyse ist die iterative Lösungsgleichung für den Diskontierungsfaktor mit Excel umgesetzt worden. Zur besseren Vergleichbarkeit sind die Tabellenwerte aus der Beispielrechnung im Anhang 3 von gif e.V. (2006) entnommen.

Für die Durchführung der ersten Iteration zur Analyse des abzuleitenden Diskontierungszinssatzes ist zunächst ein grober Näherungswert einzuführen (Tab. 2). Es wird jeweils die Verbesserung des Diskontierungszinssatzes ermittelt. Durch Addition der Verbesserung mit dem Näherungswert nach (36) wird der verbesserte Diskontierungszinssatz ausgegeben.

Nach bereits ein bis zwei Iterationen (Tab. 3) ist in der Regel der endgültige Diskontierungszinssatz 6,50 % bestimmt. Ein Vergleich der Differenz von Kaufpreis und Marktwert zeigt jeweils die Abweichung von endgültigem Diskontierungszinssatz und dem eingeführten Näherungswert in kapitalisierter Form.

Alternativ kann im Falle eines Kaufpreisangebots die abgeleitete Rendite (Ergebnis Diskontierungszinssatz) mit der Vorstellung bzw. Forderung des Investors (Näherungswert Diskontierungszinssatz) verglichen werden.

Im Falle des dritten Iterationsschrittes (Tab. 4) wird bereits die völlige Übereinstimmung mit dem strengen Wert für den Diskontierungszinssatz und damit die schnelle Konvergenz des iterativen Verfahrens deutlich.

Den jeweiligen Marktwert in Abhängigkeit vom Diskontierungszinssatz zeigt Abb. 1. Der Schnittpunkt mit der x-Achse entspricht der Nullstellenlösung 6,50 % für den Diskontierungszinssatz im Falle eines vereinbarten Kaufpreis in Höhe von 7.840.858 Euro.

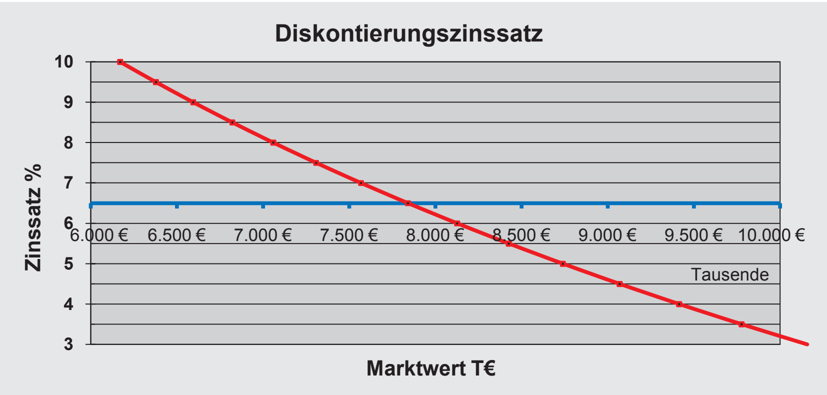

Abb. 1: Ermittlung des Diskontierungszinssatz

Beispiel gif:	**Standardisierung DCF-Verfahren mittels Taylorreihe 1. Ordnung**									
	Ableitung des Diskontierungszinssatzes									
Periode	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Einnahmen	582.120 €	582.120 €	551.550 €	614.378 €	634.943 €	577.857 €	610.211 €	558.907 €	659.322 €	455.350 €
Ausgaben	38.220 €	38.628 €	91.427 €	53.981 €	49.799 €	133.472 €	79.426 €	109.414 €	74.173 €	188.051 €
Überschüsse	543.900 €	543.492 €	460.123 €	560.397 €	585.144 €	444.385 €	530.785 €	449.493 €	585.149 €	267.299 €
Kaufpreis €	7.840.858 €									
Restwert €	7.912.650 €									
Periode Jahre	10									
Diskontierungszinssatz % (Näherung)		6,55								
Diskontierungsfaktor (Näherung)		1,0655								
Verbesserung für Diskontierungszinssatz %		-0,05								
Ergebnis Diskontierungszinssatz			**6,50**							
Ermittelter Marktwert (Näherung Diskontierungszinssatz)		7.813.014 €								
Marktwert - Kaufpreis		-27.844 €								
Eingabefeld										
Ergebnisfeld										

Tab. 3: Ableitung des Diskontierungszinssatzes – 2. Iteration (A3 gif e.V. 2006)

Beispiel gif:	**Standardisierung DCF-Verfahren mittels Taylorreihe 1. Ordnung**									
	Ableitung des Diskontierungszinssatzes									
Periode	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Einnahmen	582.120 €	582.120 €	551.550 €	614.378 €	634.943 €	577.857 €	610.211 €	558.907 €	659.322 €	455.350 €
Ausgaben	38.220 €	38.628 €	91.427 €	53.981 €	49.799 €	133.472 €	79.426 €	109.414 €	74.173 €	188.051 €
Überschüsse	543.900 €	543.492 €	460.123 €	560.397 €	585.144 €	444.385 €	530.785 €	449.493 €	585.149 €	267.299 €
Kaufpreis €	7.840.858 €									
Restwert €	7.912.650 €									
Periode Jahre	10									
Diskontierungszinssatz % (Näherung)		6,50								
Diskontierungsfaktor (Näherung)		1,0650								
Verbesserung für Diskontierungszinssatz %		0,00								
Ergebnis Diskontierungszinssatz			**6,50**							
Ermittelter Marktwert (Näherung Diskontierungszinssatz)		7.840.858 €								
Marktwert - Kaufpreis		0 €								
Eingabefeld										
Ergebnisfeld										

Tab. 4: Ableitung des Diskontierungszinssatzes – 3. Iteration (A3 gif e.V. 2006)

4.3 Linearisierung mittels Taylor-Reihenentwicklung 2. Ordnung

Die Linearisierung der Beobachtungsgleichungen mittels Taylorreihe 2. Ordnung kann aufgrund des raschen Konvergenzverhaltens mittels Taylorreihe 1. Ordnung unterbleiben. Es würde sich ein Lösungsschema $x_{1,2}$ für quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{37}$$

ergeben, wobei üblicherweise eine Lösung (z.B. negativer Diskontierungszinssatz) auszuschließen wäre.

4.4 Automatisierte Lösungen mit MATLAB

Beim Geodätischen Institut Karlsruhe wird auf Grundlage eines Rahmenvertrages der Universität Karlsruhe (TH) für technische Berechnungen, die Visualisierung und Analyse von Daten die hochentwickelte Programmiersprache *MATLAB* (MathWorks 2007) eingesetzt.

Es wird wiederum das bekannte Beispiel aus Kap. 3.2 herangezogen. Die Lösung des Polynoms zehnten Grades kann mit der in *MATLAB* enthaltenen Funktionen *fzero* und *roots* erzeugt werden.

4.4.1 fzero

Dabei werden bei Anwendung von der Funktion *fzero* einfach die Koeffizienten a_k des Polynoms nach (6) und als numerisch gute Näherung für den Diskontierungsfaktor der Wert 1 eingegeben.

```
f = @(x)
-7840858*x.^10+543900*x.^9+543492*x.^8+460123*x.
^7+560397*x.^6+585144*x.^5+444385*x.^4
+530785*x.^3+449493*x.^2+585149*x.^1
+(8179949=267299+7912650)
z = fzero(f,1)=1.065
```

Die Lösung z ergibt sich mit 1,065 für den Diskontierungsfaktor bzw. 6,5 % für den Diskontierungszinssatz.

4.4.2 Roots

Die Anwendung der Funktion *roots* basiert auf der Ermittlung von Eigenwerten. Gleichfalls werden einfach die Koeffizienten a_k des Polynoms eingegeben. Ein Näherungswert ist bei der strengen Lösung über Eigenwerte nicht erforderlich.

```
p = [ -7840858    543900    543492    460123
560397    585144    444385    530785    449493
585149    (8179949=267299+7912650) ]
r=roots (p)
r =
   1.0650
   0.8079 + 0.5862i
   0.8079 - 0.5862i
   0.3083 + 0.9510i
   0.3083 - 0.9510i
  -0.9954
  -0.8090 + 0.5839i
  -0.8090 - 0.5839i
  -0.3073 + 0.9478i
  -0.3073 - 0.9478i
```

Man erhält als Lösungen insgesamt zwei reelle Nullstellen, wobei die negative Lösung für die Anwendung ausgeschlossen wird, und acht (paarweise konjugiert) komplexe Nullstellen. Wiederum erscheint die reelle Lösung mit 6,5 %.

4.5 Simulation

Es sollte nach eingehender Betrachtung der dargestellten Analysemodelle bzw. -ergebnisse die wesentliche Erkenntnis nicht unerwähnt bleiben, wonach ein weiterer Lösungsweg mit der Simulation eingeschlagen werden kann. Es genügt, einen geeigneten Näherungswert in das Modell zur Ermittlung des Marktwertes einzusetzen. Überschreitet das Ergebnis den Kaufpreis, wird der Zinssatz in äquidistanten Schritten (z. B. 0,1 % oder mehr in Abhängigkeit von der Abweichung) erhöht bzw. umgekehrt bis letztendlich näherungsweise Identität vorliegt.

5 Theorie zu periodischen Überschüssen mit Vorzeichenwechsel

Wie bereits in Kap. 4 dargestellt, kann der einheitliche marktgerechte Diskontierungszinssatz als interner Zinsfuß direkt aus Kaufpreisen (Beobachtungen) vergleichbarer Immobilien abgeleitet werden. Ziel ist es dabei, anhand der Barwertformel den internen Zinssatz zu berechnen, bei dem die Summe aller diskontierten Reinerträge zuzüglich des diskontierten Restwertes gleich dem vorliegenden Kaufpreis(angebot) einer Immobilie ist. Im Einzelfall können nach Brühl (1999) bei Vorzeichenwechseln der Einnahmen-/Ausgabensituation im Betrachtungszeitraum Mehrdeutigkeiten in der Lösungsfindung auftreten.

These von Brühl (1999):
Für den Fall, dass innerhalb des Betrachtungszeitraums der Netto-Cash-Flow mehr als einmal z. B. durch Leerstände oder Modernisierungskosten das Vorzeichen wechselt (d. h. die Ausgaben die Einnahmen übersteigen), tritt rechnerisch das Problem der Mehrdeutigkeit auf, d. h. es können sich mehrere mathematisch korrekte Lösungen ergeben.

5.1 Beispiel

Auf Grundlage des bekannten Beispiels, in dem nun aber die Ausgaben im dritten und siebten Betrachtungsabschnitt die Einnahmen übersteigen (Tab. 5), soll aufgezeigt werden, dass die bisherigen Annahmen zur Mehrdeutigkeit nicht zutreffend sind.

Aus Tab. 5 kann anschaulich nachvollzogen werden, dass mit Ausnahme der negativen Änderungen der Überschüsse im dritten und siebten Jahr und ansonsten unveränderten Daten der Käufer folgerichtig mit einer geringeren Rendite einverstanden sein muss.

Der Diskontierungszinssatz kann aus Abb. 2 gleichfalls mit ausreichender Genauigkeit mit 5 % (rechnerisch 5,03 %) entnommen werden.

5.2 Korrektur der Theorie

Zunächst ist allgemein davon auszugehen, dass es für ganze rationale Funktionen $f(x)$ (Polynome) n-ten Grades mit $n + 1$ reellen Koeffizienten nach dem Fundamentalsatz der Algebra genau n unter Umständen komplexe Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ gibt. Dies gilt grundsätzlich unabhängig von den Vorzeichen der Koeffizienten. Vom

Beispiel gif:	**Standardisierung DCF-Verfahren mittels Taylorreihe 1. Ordnung**									
	Ableitung des Diskontierungszinssatzes									
Periode	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Einnahmen	582.120 €	582.120 €	551.550 €	614.378 €	634.943 €	577.857 €	610.211 €	558.907 €	659.322 €	455.350 €
Ausgaben	38.220 €	38.628 €	600.000 €	53.981 €	49.799 €	133.472 €	700.000 €	109.414 €	74.173 €	188.051 €
Überschüsse	543.900 €	543.492 €	**-48.450 €**	560.397 €	585.144 €	444.385 €	**-89.789 €**	449.493 €	585.149 €	267.299 €
Kaufpreis €	**7.840.858 €**									
Restwert €	7.912.650 €									
Periode Jahre	10									
Diskontierungszinssatz % (Näherung)		5,03								
Diskontierungsfaktor (Näherung)		1,0503								
Verbesserung für Diskontierungszinssatz %		0,00								
Ergebnis Diskontierungszinssatz			**5,03**							
Ermittelter Marktwert (Näherung Diskontierungszinssatz)		7.841.624 €								
Marktwert - Kaufpreis		766 €								
Eingabefeld										
Ergebnisfeld										

Tab. 5: Ableitung des Diskontierungszinssatzes – Vorzeichenwechsel der Überschüsse

Vorliegen nur einer reellen Nullstelle mit ggf. der algebraischen Vielfachheit 1 für Polynome n-ten Grades ($n > 1$) kann gemäß dem Fundamentalsatz überhaupt nicht ausgegangen werden.

Entscheidend ist hierbei der Gesamtverlauf (Trend) der Funktion des Barwerts bzw. Marktwerts und nicht der Cash-Flow in den einzelnen Zeitintervallen des Betrachtungszeitraums. Folglich führt ein mehr als einmaliger Vorzeichenwechsel des Netto-Cash-Flows in einzelnen Zeitphasen im Betrachtungszeitraum im Regelfall zu keiner uninterpretierbaren Mehrdeutigkeit der reellen Lösungen.

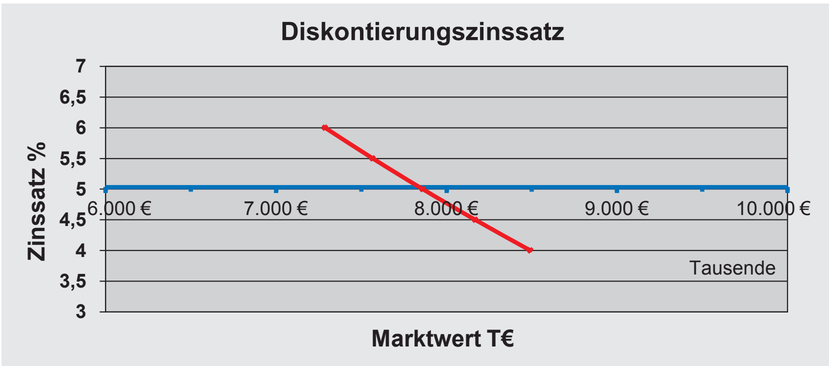

Abb. 2: Ermittlung des Diskontierungszinssatzes – Vorzeichenwechsel der Überschüsse

Auf die Ausführungen in Kap. 3 und 4 zu den mathematischen Grundlagen wird verwiesen. Die diesbezüglich vorherrschende Fachmeinung in der Wertermittlungsliteratur kann folglich umgeschrieben werden.

6 Varianzkovarianzfortpflanzung im DCF-Verfahren

Es wird häufig darauf hingewiesen, dass im DCF-Verfahren alle Ansätze kritisch zu würdigen und nachvollziehbar zu begründen sind. Der unterschiedliche Einfluss der einzelnen Ansätze auf die Höhe des Bewertungsergebnisses ist zu beachten. Insbesondere ist zu berücksichtigen, dass sich eine fehlerhafte Ableitung der Marktmiete in dem periodischen Betrachtungszeitraum und beim Restwert über die Laufzeit potenzieren (gif e.V. 2006).

Auch Kanngieser et al. (2007) weisen darauf hin, dass neben der nicht ausreichenden Anzahl von Vergleichsobjekten zur Ableitung des Diskontierungszinssatzes ein wesentlicher Schwachpunkt des DCF-Verfahrens in der Schätzung des Verkauferlöses am Ende des Betrachtungszeitraumes liegt. Der Restwert kann mit erheblichen Unsicherheiten behaftet sein.

Die Varianzkovarianzanalyse für Wertermittlungsverfahren ist in Mürle (2007) eingehend untersucht und dargestellt worden. Dabei hat sich gezeigt, dass bei aller Vorsicht bzw. Kritik, die sich gegen die Anwendung des Verfahrens als Wertermittlungsverfahren wendet, eine wesentliche Erkenntnis nicht verkannt werden darf.

Sämtliche Einflüsse auf die Ergebnisvarianz – mit Ausnahme der ggf. zum Stichtag anfallenden Investitionskosten – erfahren über die an den jeweiligen Laufzeiten der Perioden im Betrachtungszeitraum orientierten Potenzen des invertierten Diskontierungsfaktors im Quadrat eine nicht unerhebliche Dämpfung. Die Einführung von marktorientierten Größen wird vorausgesetzt. Eine pauschale Abwertung der Methode aufgrund von Schwächen in der Varianzfortpflanzung kann insoweit nicht uneingeschränkt vertreten werden.

Damit kann auch im Hinblick auf die vorgesehene Aufnahme des DCF-Verfahrens in den Kreis der anerkannten Wertermittlungsverfahren der WertV *die schwere Last der Varianzfortpflanzung leichter geschultert werden.*

7 Schlussfolgerung und Ausblick

Das Geschehen auf den Grundstücksmärkten wird immer stärker auch durch die zunehmende Internationalisierung der Immobilienwirtschaft beeinflusst (BMVBS 2008). Daraus entsteht neben dem Fortentwicklungsbedarf der WertV zur Verbesserung der internationalen Vermittelbarkeit bzw. Nachvollziehbarkeit eine neue, bedeutungsvolle Komponente, die an eine Auftragsvergabe geknüpfte Bedingung der Anwendung des DCF-Verfahrens.

Zur Ermittlung des Verkehrswertes sind zukünftig die Verfahren nach der Art des Gegenstands unter Berücksichtigung der im gewöhnlichen Geschäftsverkehr bestehenden Gepflogenheiten und der sonstigen Umstände des Einzelfalls, insbesondere der zur Verfügung stehenden Daten, zu wählen; die Wahl ist zu begründen. Die Anwendung des DCF-Verfahrens dient dabei der objektiven Marktwertermittlung und soll sich somit deutlich von individuellen Investorenrechnungen unterscheiden.

Die für die Wertermittlung erforderlichen Daten sind aus der Kaufpreissammlung auf der Grundlage geeigneter Kaufpreise unter Berücksichtigung der jeweiligen Lage auf dem Grundstücksmarkt abzuleiten. Die durchschnittliche marktübliche Verzinsung des Verkehrswerts von Grundstücken soll dabei mit den im gewöhnlichen Geschäftsverkehr zugrunde gelegten Kapitalisierungszinssätzen erfasst werden. Die Analyse der Diskontierungszinssätze im DCF-Verfahren kann durch Gutachterausschüsse mit großen örtlichen Zuständigkeitsbereichen oder die Oberen Gutachterausschüsse selbst durchgeführt werden. Zur geforderten Standardisierung, die zumindest auf Länderebene erreicht werden sollte, ist anzumerken, dass hierzu der jeweilige Obere Gutachterausschuss selbst den erforderlichen Beitrag leisten muss oder es kann durch Vorhaben wie die Erstellung eines bundesweiten Grundstücksmarktberichts Einfluss zur Vergleichbarkeit der Ergebnisse genommen werden.

Da das DCF-Verfahren unzweifelhaft nur für ausgewählte Einzelfälle zur Anwendung kommen wird, erscheint im Interesse der Ableitung von Diskontierungszinssätzen hoher Aussagekraft, für die auch die Ausgangsdaten nach Art und Umfang unbedenklich bei der Veröffentlichung dargestellt werden können, eine Zuordnung zum Aufgabenbereich des Oberen Gutachterausschusses empfehlenswert. Die Lösungsalgorithmen hierzu stehen mit den mathematischen Grundlagen umfassend aufbereitet zur Verfügung.

Maßgebliche Bedeutung kommt hierbei der Qualität der Ausgangsdaten der geeigneten Kaufpreise zu. Es kann unterstellt werden, dass in der Regel für typische DCF-/Investmentobjekte die periodischen Erträge z. B. beim Erwerber (gutachtlich) vorliegen und *lediglich* erhoben werden müssen. Nun ist eine gewisse Zögerlichkeit im Rahmen von Auskunftsverlangen nach § 197 BauGB allseits nichts Unbekanntes. Zur Steigerung der Rücklaufquote der zugesandten Fragebogen und ggf. der Qualität der angegebenen Daten kann die Zustellung als Verwaltungsakt beitragen, zumindest kann beim Gutachterausschuss in Karlsruhe eine überaus erfreuliche Entwicklung beobachtet werden.

Literatur

Bundesverband der Immobilien-Investment-Sachverständigen e. V. (BIIS): Marktkonformes DCF-Verfahren, Plausibilisierung von Marktwerten. http://www.biis.info/Info-Center, 2006.

Bundesministerium für Verkehr, Bau und Stadtentwicklung (BMVBS): Bericht des Sachverständigengremiums zur Überprüfung des Wertermittlungsrechts. http://www.bmvbs.de/Stadtentwicklung, Wohnen, 2008.

Brühl, Martin J.: Aspekte des Discounted Cash-Flow-Verfahrens. Sprengnetter Immobilienbewertung, 7. Jahreskongress *Immobilienbewertung* in Weimar, 1999.

Forkert, Christina: DCF – Ein Muss für jeden Immobilienbewerter? Sprengnetter Immobilienbewertung, 15. Jahreskongress *Immobilienbewertung* in Dresden, 2007.

Gesellschaft für immobilienwirtschaftliche Forschung e. V. (gif e. V.): Standardisierung des DCF-Verfahrens. www.gif-ev.de/publikationen, 2006.

Kanngieser, E., Kertscher, D., Jessen, M.: Analyse nicht normativ geregelter Wertermittlungsverfahren. zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement, 132(6): 347–356, 2007.

MathWorks: Programmiersprache MATLAB Version 7.4.0 (R2007a), 2007.

Mürle, M.: Aufbau eines Wertermittlungsinformationssystems. Schriftenreihe des Studiengangs *Geodäsie und Geoinformatik* der Universität Karlsruhe (TH), Band 3, Universitätsverlag Karlsruhe, 2007.

Niemeier, W.: Ausgleichungsrechnung. Verlag de Gruyter, Berlin/New York, 2002.

Schmitt, G.: Statistik und Ausgleichungsrechnung I. Vorlesung am Geodätischen Institut, Universität Karlsruhe (TH), Skriptum, 2005a.

Schmitt, G.: Statistik und Ausgleichungsrechnung II. Vorlesung am Geodätischen Institut, Universität Karlsruhe (TH), Skriptum, 2005b.

Schmitt, G.: Statistik und Ausgleichungsrechnung III. Vorlesung am Geodätischen Institut, Universität Karlsruhe (TH), Skriptum, 2005c.

Weissinger, J.: Höhere Mathematik Teil I. Vorlesung der Fakultät für Mathematik. Universität Karlsruhe (TH), Skriptum, 1977.

Weissinger, J.: Höhere Mathematik Teil II. Vorlesung der Fakultät für Mathematik. Universität Karlsruhe (TH), Skriptum, 1978.

Anschrift der Autoren
Dr.-Ing. Michael Mürle
Grundstücksbewertungsstelle/Geschäftsstelle des Gutachterausschusses
Stadt Karlsruhe
Hebelstraße 21, 76133 Karlsruhe
michael.muerle@gutachterausschuss.karlsruhe.de

Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Günter Schmitt
Lehrstuhl für Mathematische und Datenverarbeitende Geodäsie
Geodätisches Institut, Universität Karlsruhe (TH)
Englerstraße 7, 76128 Karlsruhe
guenter.schmitt@gik.uni-karlsruhe.de