

100 Jahre Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie: Tests und Anwendungen

Michael Soffel

Zusammenfassung

Die entscheidenden Publikationen Einsteins zu seiner Gravitationstheorie wurden 1915 veröffentlicht, weswegen wir dieses Jahr 100-jähriges Jubiläum der »Allgemeinen Relativitätstheorie« (ART) feiern dürfen. Dieser Beitrag erscheint aus diesem Anlass. Er geht auf verschiedenste Tests der ART ein, das Newton'sche Kraftgesetz (5te Kraft), verschiedene Formen des Äquivalenzprinzips, gravitative Rotverschiebung, Tests metrischer Gravitationstheorien, wie Ausmessungen der anomalen Periheldrehung von Planeten, gravitative Lichtablenkung und Laufzeitverzögerung, etc. Es wird beschrieben, wie solche relativistischen Effekte in geodätische Messverfahren eingehen und wie sie auf diese Art und Weise Eingang in praktische Anwendungen wie etwa Umweltmonitoring gefunden haben.

Summary

The most relevant papers by Einstein on his theory of gravity were published in 1915; for that reason this year we can celebrate the 100th anniversary of the »General Theory of Relativity« (GRT). This contribution appears for that reason. It deals with diverse tests of GRT, Newton's law of gravity (5th force), different forms of the equivalence principle, the gravitational redshift, tests of metric theories of gravity like the measurement of planetary anomalous perihelion precession, the gravitational light bending and time delay, etc. It is described how such relativistic effects enter geodetic measurements and thus practical applications like monitoring of our natural environment.

Schlüsselwörter: Relativität, Einstein'sche Gravitationstheorie, Tests, Anwendungen, geodätische Raumverfahren

1 Einleitung

Das Jahr 1905 wird oft als *Annus Mirabilis* der Physik bezeichnet. Mit vier Artikeln in den *Annalen der Physik* zur Erklärung des photoelektrischen Effektes (Einstein 1905a), zur Brown'schen Bewegung suspendierter Teilchen (Einstein 1905b), zur Speziellen Relativitätstheorie (SRT; Einstein 1905c) und zur Äquivalenz von Masse und Energie (Einstein, 1905d) revolutioniert Einstein die Physik auf bahnbrechende Art und Weise. Das dritte Papier »Zur Elektrodynamik bewegter Körper« basiert auf dem (speziellen) Relativitätsprinzip in Abwesenheit von gravitativen Feldern: Alle nicht-gravitativen Gesetze der Physik, wie etwa die Maxwell'sche Theorie der Elektrodynamik oder die Mechanik sehen in jedem Inertialsystem

gleich aus. Dieses Prinzip enthält insbesondere die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum vom Bewegungszustand der Lichtquelle und eines Beobachters im Einklang mit den Ergebnissen des berühmten Michelson-Morley-Experiments (1887).

In der Zeit zwischen 1912 und 1915 hat Einstein dann intensiv auf der Thematik der Einbindung gravitativer Felder in die Spezielle Relativitätstheorie geforscht. Geleitet wurde er dabei von mehreren Prinzipien: dem von Mach formulierten Prinzip der Trägheit als Resultat von Wechselwirkungen mit anderer Materie, dem Prinzip der Kovarianz (physikalische Gesetze lassen sich in beliebigen Koordinaten einer 4-dimensionalen Raum-Zeit mittels Vektoren, Tensoren und kovarianter Ableitung formulieren) und dem Einstein'schen Äquivalenzprinzip. Es besagt, dass an jedem Ort und zu jeder Zeit frei fallende »lokale Inertialsysteme« (Fahrstühle) existieren, in denen alle nicht gravitativen Gesetze der Physik ihre Form aus der SRT annehmen. Diese drei Prinzipien sind von ganz unterschiedlichem Charakter. Eine präzise mathematische Formulierung des Mach-Prinzips existiert nicht, so dass niemand genau sagen kann, was es eigentlich bedeutet. Kovarianz ist eine Forderung, wie man ein physikalisches Gesetz hinschreiben sollte, und hat wenig physikalischen Inhalt. Man kann selbst die Newton'sche Theorie der Gravitation kovariant mit einer absoluten Zeit formulieren (Soffel 1989). Das Einstein'sche Äquivalenzprinzip dagegen enthält eine ganze Fülle testbarer physikalischer Aussagen (z. B. Will 1993, 2014); es führt dazu, dass die Gravitation mit Hilfe einer metrischen Theorie beschrieben werden kann. Die SRT selbst kann bereits als eine solche aufgefasst werden. Nach dem Relativitätsprinzip gilt in jedem Inertialsystem mit Koordinaten $x^\mu = (ct, x, y, z)$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) entlang eines Lichtstrahles im Vakuum

$$d\mathbf{x}^2 = c^2 dt^2, \quad (1)$$

was man auch so deuten kann, dass entlang eines Lichtstrahls ein raum-zeitliches Längenelement verschwindet, d. h.

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\mathbf{x}^2 \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \quad (2)$$

mit einem metrischen Tensor

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1) \quad (3)$$

und einer Summation über μ, ν von 0 bis 3. Das Einstein'sche Äquivalenzprinzip (EÄP) stellt eine Erweiterung des schwachen ÄP dar; dieses besagt, dass alle

ungeladenen Testkörper in einem äußeren Gravitationsfeld gleich schnell fallen. Mit seiner oben erwähnten Erweiterung führt es dazu, dass man die Gravitation als metrische Theorie beschreiben kann: Die Raum-Zeit besitzt ein metrisches Feld $g_{\mu\nu}$, das lokal in einem frei fallenden Fahrstuhl in $\eta_{\mu\nu}$ übergeht, und die Trajektorien frei fallender Körper sind Geodäten dieser Metrik (da die Geodäten in inertialen Koordinaten Geraden sind, entlang derer sich Probekörper gleichförmig bewegen). Im Fall der Einstein'schen Gravitationstheorie (irreführend »Allgemeine Relativitätstheorie«, ART, genannt) wird die gravitative Wechselwirkung ausschließlich durch ein metrisches $g_{\mu\nu}$ -Feld beschrieben. Die Einstein'schen Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (4)$$

aus denen sich die Form des metrischen Feldes ergibt, wurden erstmals im November 1915 publiziert (Einstein 1915c, s. auch 1915a,b), weshalb wir in diesen Jahr das 100-jährige Jubiläum der ART feiern dürfen. In den Feldgleichungen (4) sind $T_{\mu\nu}$ die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors, der die Quellen der Gravitationsfelder enthält. Dominiert wird er durch die Zeit-Zeit-Komponente, die in Newton'scher Näherung durch $T_{00} = \rho c^2$ gegeben ist, wobei ρ die Materiedichte beschreibt; dies erklärt, warum Effekte der ART insbesondere bei Zeitproblemen in Erscheinung treten. $G_{\mu\nu}$ ist der Einstein-Tensor, der das metrische Feld $g_{\mu\nu}$ und deren erste und zweite Ableitungen enthält.

Die Einstein'sche Gravitationstheorie stellt eine Erweiterung der Newton'schen dar. Der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ der ART enthält für schwache Felder das Newton'sche Gravitationspotenzial U , und die Einstein'schen Feldgleichungen gehen in Näherung über in die Poisson-Gleichung der Newton'schen Theorie: $\Delta U = -4\pi G\rho$. Die Kraft, die eine felderzeugende Masse M am Koordinatenursprung auf eine Testmasse ausübt, ist dann durch das Newton'sche Gravitationsgesetz

$$m_I \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GMm_G}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (5)$$

bestimmt, wobei m_I und m_G die inertielle (träge) und die gravitative Masse des Testkörpers beschreiben. Dieses Newton'sche Gravitationsgesetz enthält mehrere Annahmen, die experimentell überprüft werden können und die wir jetzt diskutieren wollen. Diese dienen als wichtige Grundlage der ART.

2 Tests des Newton'schen Gravitationsgesetzes

2.1 Schwaches Äquivalenzprinzip

Das schwache Äquivalenzprinzip (SÄP) besagt, dass für alle Testkörper das Verhältnis m_G/m_I gleich ist. Vergleicht man das Freifall-Verhalten zweier Testkörper, so dient der Eötös-Parameter (Will 2014)

$$\eta \equiv \frac{a_1 - a_2}{(a_1 + a_2)/2} = 2 \frac{(m_G/m_I)_1 - (m_G/m_I)_2}{(m_G/m_I)_1 + (m_G/m_I)_2} \quad (6)$$

hierbei als Messgröße. Galileo Galilei, Isaac Newton und Friedrich Bessel haben zunächst das SÄP mittels Pendelmessungen überprüft (bei gleicher Pendellänge hängt die Schwingungsperiode vom Verhältnis m_G/m_I ab). Ein großer Fortschritt wurde durch den Einsatz von Torsionswaagen erreicht. Bei einer idealen Torsionswaage mit zwei Testmassen, welche die Gesamtkräfte \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 erfahren, ist das Drehmoment in Richtung der Aufhängeachse durch (z.B. Adelberger et al. 1990a,b, 2009)

$$D_z = \frac{(\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) \cdot \mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2|} \quad (7)$$

gegeben, hängt also vom Winkel zwischen den beiden Kräften ab; ein solcher tritt dann auf, wenn das Verhältnis von gravitativer Kraft zur Trägheitskraft, hervorgerufen durch die Erddrehung, unterschiedlich ist. In den klassischen Princeton- und Moskau-Experimenten (Will 2014) studierte man den Fall der Testmassen auf die Sonne mit erdfester Torsionswaage, die sich also in 24 Stunden

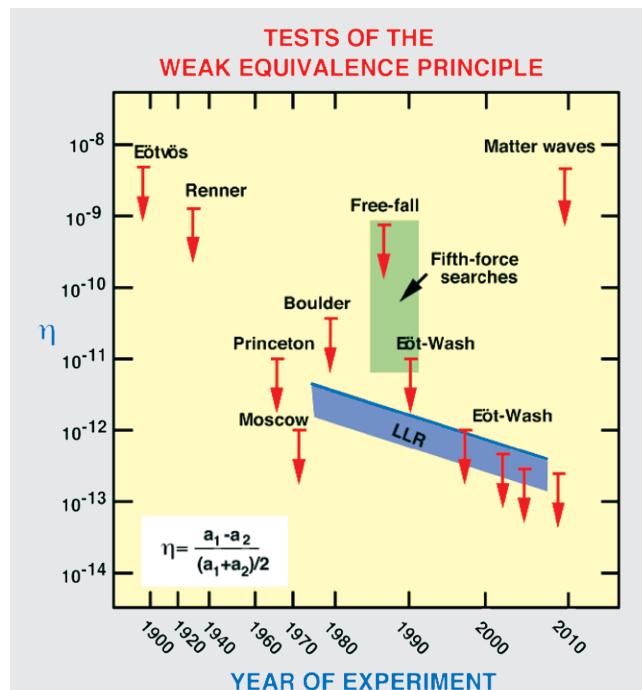


Abb. 1: Messungen des Eötös-Parameters η als Tests des schwachen Äquivalenzprinzips (Will 2014)

einmal zur Sonne dreht. Nun haben aber viele systematische Effekte eben diese Periode, sodass die Torsionswaagen der Eöt-Wash-Gruppe um Eric Adelberger auf einer Plattform aktiv gedreht werden; die Erde selbst kann dann als Attraktor wirken. Neueste Messungen der Eöt-Wash-Gruppe liefern für verschiedene Paare von Materialien (Be-Ti, Be-Al) realistische Genauigkeiten im Bereich einiger 10^{-13} (Wagner et al. 2012). Man hofft, die Messgenauigkeit im Labor in den nächsten Jahren um einen Faktor 10 verbessern zu können.

Die mit LLR bezeichnete Kurve in Abb. 1 verweist auf Lasermessungen zum Mond (Müller et al. 2014). In Hinblick auf das SÄP betrachtet man Erde (E) und Mond (M) im freien Fall auf die Sonne (S). Mit $\mathbf{a}_i = (m_G/m_i)_i \mathbf{g}_S = (1 + \Delta_i) \mathbf{g}_S$ ($i = E, M$) ergäben sich bei einer Verletzung des SÄP anomale Oszillation in der Erde-Mond-Distanz von $d(t)$ [cm] = $2 \times 10^{12} (\Delta_E - \Delta_M) \cos [(\Omega_M - \Omega_E) t]$ (Ω_i : Winkelgeschwindigkeit des Mondes um die Erde, bzw. der Erde um die Sonne). Aus der Obergrenze für die Amplitude bei einem synodischen Monat ergibt für eine mögliche Verletzung des SÄP (Müller et al. 2012):

$$\eta = |\Delta_E - \Delta_M| < 1,4 \times 10^{-13}. \quad (8)$$

Spezielle Satellitenmissionen wie Microscope (Touboul et al. 2012), GG (Nobili et al. 2012) oder STEP (Locke et al. 2001, Sumner 2004) wurden vorgeschlagen, um das SÄP noch genauer zu überprüfen. Die Messgenauigkeiten sollen dabei um 10^{-15} bei Microscope und 10^{-17} bei GG und STEP liegen.

2.2 5te Kraft

Es gibt etliche physikalische Spekulationen, wonach massive Teilchen bei der Gravitationskraft beteiligt sein könnten (5te Kraft). Eine Konsequenz wäre eine Verletzung des $1/r^2$ -Gesetzes, was man durch eine Distanzabhängigkeit von G in der Form

$$G(r) = G_\infty [1 + \alpha (1 + r/\lambda) e^{-r/\lambda}] \quad (9)$$

beschreiben kann. α und λ beschreiben hier Stärke und effektive Reichweite einer 5ten Kraft. Angeregt durch eine Re-Analyse der Eötös-Experimente durch Fischbach et al. (1999) gab es eine ganze Reihe von Messungen (Thieberger 1987, Boynton et al. 1987, Eckhard et al. 1988), die für die Existenz einer solchen 5ten Kraft sprachen; später stellte sich heraus, dass systematische Fehler nicht korrekt eingeschätzt worden waren. Ein wesentlicher Fortschritt wurde durch den Einsatz von rotierenden Torsionswaagen erzielt (Heckel et al. 1989, Adelberger et al. 1990a,b, 1991). Abb. 2 zeigt obere Grenzen für $|\alpha|$ für den Bereich $\lambda \leq 2$ cm (Spero et al. 1980, Hoskins et al. 1985, Long et al. 2003, Chiaverini et al. 2003, Hoyle et al. 2004, Smullin et al. 2005, Kapner et al. 2007). Abb. 3 zeigt obere Grenzen für $|\alpha|$ für $\lambda > 1$ cm. Man sieht, dass

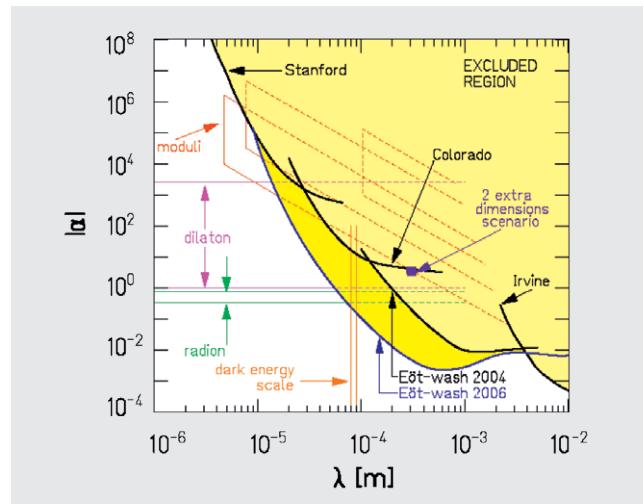


Abb. 2: Messungen zur 5ten Kraft im Bereich $\lambda \leq 2$ cm (Kapner et al. 2007). Dargestellt werden obere Grenzen für $|\alpha|$.

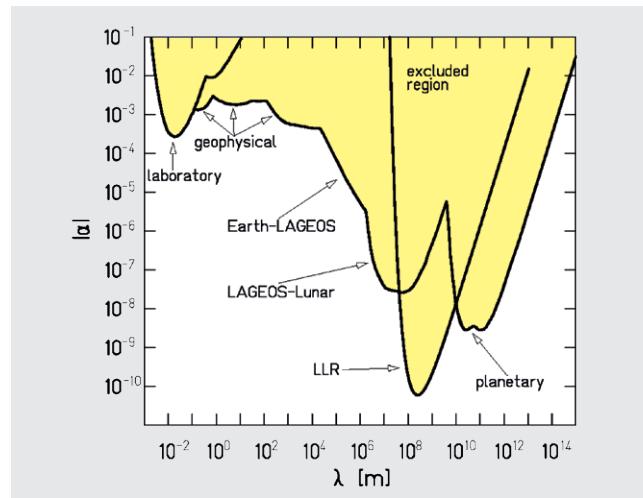


Abb. 3: Messungen zur 5ten Kraft im Bereich $\lambda > 1$ cm (Fischbach and Talmadge 1999, Adelberger et al. 2003). Dargestellt werden obere Grenzen für $|\alpha|$.

in weiten Bereichen Lasermessungen zu Satelliten (SLR) und zum Mond (LLR) die genauesten sind; LLR-Messungen dominieren zwischen etwa 10^7 m und 10^{10} m um die mittlere Erde-Mond-Distanz d_{EM} von 384.000 km. Für $\lambda \approx d_{EM}$ erhält man eine Obergrenze für $|\alpha|$ von rund $1,8 \times 10^{-11}$ (Müller et al. 2014).

2.3 Zeitliche Variation der Gravitationskonstanten \dot{G}/G

Messungen zur zeitlichen Variabilität der Newton'schen Gravitationskonstanten G werden seit vielen Jahren durch LLR-Messungen dominiert. Erreichte man in den späten 70er Jahren für eine obere Grenze für \dot{G}/G mittels Radardaten zu Planeten und Raumsonden eine Genauigkeit von rund $10^{-11}/a$, so werden durch LLR-Messungen realistische obere Grenzen von $1,5 \times 10^{-13}/a$ (Hofmann et al. 2010, Müller et al. 2014) erreicht. Derzeit stammen

die besten Messungen dieser Art von der LLR-Gruppe um Jürgen Müller in Hannover.

3 Einstein'sche Gravitationstheorie

Der letzte Abschnitt hat gezeigt, dass die verschiedenen Aspekte der Newton'schen Gravitationstheorie mit höchster Präzision Gültigkeit besitzen. Bis zum Jahr 1859 konnte die Newton'sche Theorie alle Beobachtungen des Sonnensystems im Rahmen der erreichten Messgenauigkeit erklären. Mit ihrer Hilfe war Urbain Leverrier sogar 1846 in der Lage, die Position eines neuen Planeten (Neptun) vorauszusagen; dadurch konnte Neptun dann im September 1846 durch Galle entdeckt werden. Leverrier konnte auch mit ausgefeilter Störungstheorie die Periheldrehung des Merkur berechnen, wobei Jupiter und Venus mit Beiträgen von 153,6 bzw. 277,8"/Jhd. die größten Newton'schen Störungen liefern (Will 1993). Zu den Beobachtungen blieb jedoch eine im Rahmen der Newton'schen Gravitationstheorie unerklärbare Diskrepanz von rund 43"/Jhd. Diese erfuhr erst im Rahmen der Einstein'schen ART eine einfache Erklärung.

Wesentlicher Grundpfeiler der Einstein'schen Gravitationstheorie ist das bereits erwähnte Einstein'sche Äquivalenzprinzip (EÄP). Neben dem SÄP beinhaltet es die Prinzipien i) der Lokalen Lorentz Invarianz (LLI) und ii) der lokalen Positions Invarianz (LPI). Die LLI sagt aus, dass der Ausgang eines jeden nicht-gravitativen Expe-

rimentes unabhängig ist von der Geschwindigkeit eines frei fallenden Bezugssystems, in dem wir beobachten (z. B. Will 1993, 2014). Für die Geodäsie ist die LPI das wichtigere Prinzip, das besagt, dass der Ausgang jedes nicht-gravitativen Experiments unabhängig davon ist, wo und wann es ausgeführt wird. Ein Aspekt der LPI ist die gravitative Rotverschiebung: Durchläuft Licht eine Potenzialdifferenz ΔU , so erfährt es eine Verschiebung in der Frequenz von $\Delta v/v = \Delta U/c^2$. Mit einem Messparameter α schreibt man dies in der Form

$$\frac{\Delta v}{v} = (1 + \alpha) \frac{\Delta U}{c^2}, \quad (10)$$

wobei in der Einstein'schen ART gilt: $\alpha = 0$. Nun ist die SI-Sekunde an die Frequenz der bekannten Mikrowellenlinie des ^{133}Cs -Atomes geknüpft, sodass die Gangrate einer idealen Uhr vom dort herrschenden Gravitationspotenzial U abhängt (gravitative Felder verlangsamen eine Uhr). Abb. 4 zeigt experimentelle obere Grenzen für eine Verletzung der LPI. GPA verweist auf das Gravity Probe-A Experiment von Vessot et al. (1980). Hier wurde ein H-Maser mit einer Scout Rakete in eine Höhe von 10.000 km geschossen und dessen Uhrengang mit dem einer Stationsuhr verglichen. Die in Abb. 4 mit rot markierten Pfeile verweisen auf Null-Experimente, bei denen die Gangraten unterschiedlich gebauter Uhren miteinander verglichen wurden.

3.1 Starkes Äquivalenzprinzip

Das starke Äquivalenzprinzip erweitert das SÄP auf Körper, bei denen die gravitative Selbstenergie nicht mehr vernachlässigt werden kann. Hier betrachtet man wieder Erde und Mond im freien Fall auf die Sonne. Falls

$$(m_G/m_1)_M - (m_G/m_1)_E \equiv \eta_N (\Delta_E - \Delta_M) \neq 0 \quad (11)$$

(Δ : – grav. Selbstenergie / Gesamtenergie) würden sich anomale Oszillationen in der Erde-Mond-Distanz mit einer Amplitude von etwa $13 \eta_N$ m (Will 1993, 2014) und einer Periode von einem synodischen Monat ergeben. Der Nordtvedt-Parameter η_N , der nach dem Entdecker dieses Effektes, Ken Nordtvedt (1968a-c, 1991) benannt ist, verschwindet in der ART, in der das starke Äquivalenzprinzip erfüllt ist. Neueste Abschätzungen mittels LLR-Daten lieferten $\eta_N = (2 \pm 4) \times 10^{-4}$ (Hofmann et al. 2010, Müller et al. 2012, 2014).

3.2 Anomale Periheldrehung

Die anomale Periheldrehung der Merkurbahn erfährt im Rahmen der Einstein'schen ART eine direkte Erklärung. Berücksichtigt man in der Beschleunigung des Merkur, hervorgerufen durch das sphärische Gravitationsfeld der

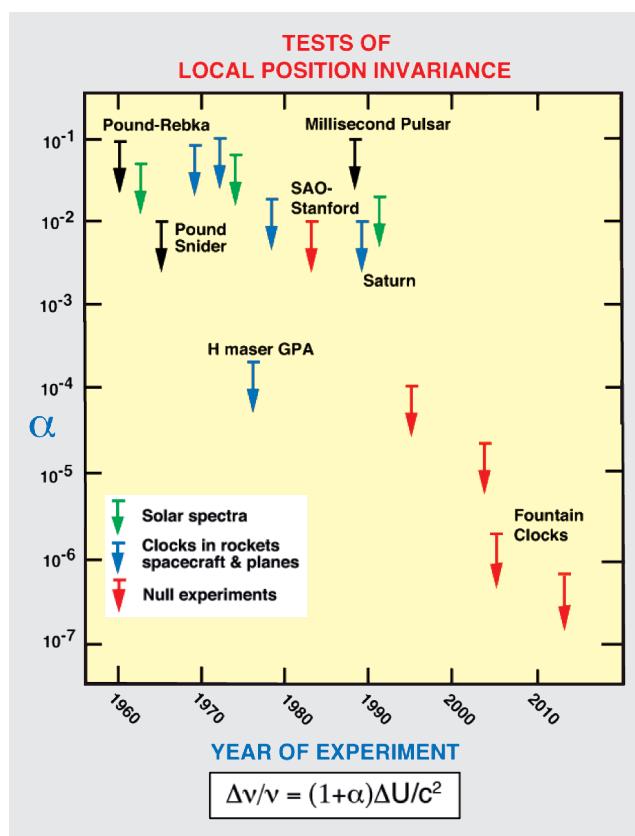


Abb. 4: Verschiedene Tests der Lokalen Positions Invarianz (LPI). Gezeigt werden obere Grenzen für $|\alpha|$.

Sonne, neben den Newton'schen Termen noch solche proportional zu $1/c^2$, so ergibt sich der gemessene Wert der Periheldrehung.

Wie bereits erwähnt, wird die gravitative Wirkung in der ART alleine durch das metrische Feld $g_{\mu\nu}$ beschrieben, wobei man für eine post-Newton'sche Theorie der Bewegung massiver Körper Terme der Ordnung $1/c^4$ in g_{00} , $1/c^3$ in g_{0i} und $1/c^2$ in g_{ij} braucht. Für eine Testtheorie schreibt man

$$g_{00} = -1 + \frac{2w}{c^2} - 2\beta \frac{w^2}{c^4}, \quad g_{ij} = \delta_{ij} \left(1 + 2\gamma \frac{w}{c^2} \right), \quad (12)$$

wobei w eine Verallgemeinerung des Newton'schen Potenzials U darstellt ($w = U + 1/c^2$ -Terme). Die Parameter β und γ sind die wichtigsten einer parametrisierten post-Newton'schen (PPN) Theorie (Will 1993, 2014). In der Einstein'schen Theorie gilt $\beta = 1$, $\gamma = 1$. In diesem Formalismus ist die Periheldrehung des Merkur proportional zu $(2\gamma + 2 - \beta)$. Die Abplattung der Sonne J_2^S liefert ebenfalls einen (Newton'schen) Beitrag dazu. Moderne numerische Ephemeriden des Sonnensystems wie die Serien DE (JPL, Pasadena), INPOP (Paris) oder EPM (St. Petersburg) liefern aus umfangreichen Datensätzen (Soffel and Langhans 2013) Parameterschätzungen. Neuere Ephemeriden liefern (Fienga et al. 2010, Pitjeva 2010)

$$|\gamma - 1| < 0,0002, \quad |\beta - 1| < 0,0002, \quad J_2^S = (2,0 \pm 0,5) \times 10^{-7}. \quad (13)$$

3.3 Gravitative Lichtablenkung und Laufzeitverzögerung

Die besten Obergrenzen von γ stammen aus Messungen der gravitativen Lichtablenkung und Laufzeitverzögerung. Lichtstrahlen, die von Sternen herrennen werden im Gravitationsfeld der Sonne abgelenkt, sodass die scheinbaren Positionen nach Außen (weg von der Sonne) verschoben werden. Diese Lichtablenkung beträgt rund $1,75''$ am Sonnenrand und ist proportional zu $(\gamma + 1)/2$ im PPN-Formalismus. Wenn die Lichtstrahlen durch ein Gravitationsfeld laufen, benötigen sie auch eine längere Zeit zwischen zwei materiell markierten Punkten, als ohne G-Feld; dies ist die zuerst von Shapiro (1964) diskutierte gravitative Laufzeitverzögerung. Abb. 5 zeigt Messwerte für $(\gamma + 1)/2$ (Will 2014; streng genommen misst VLBI hierbei den Shapiro-Delay). Seit längerer Zeit werden Daten aus regulären geodätischen VLBI-Messungen zur Messung von γ verwendet (Heinkelmann and Schuh 2010). Lambert and LePoncin-Lafitte (2010) analysierten mehr als 7 Millionen Group-Delay-Daten aus geodätischen VLBI- und VLBA-Messungen und erhielten: $\gamma = 0,99992 \pm 0,00012$, wobei hier ein formaler Fehler angegeben ist.

Die besten Messungen von γ stammen von der Cassini-Huygens-Mission (NASA-ESA-ASI), zur Erforschung des

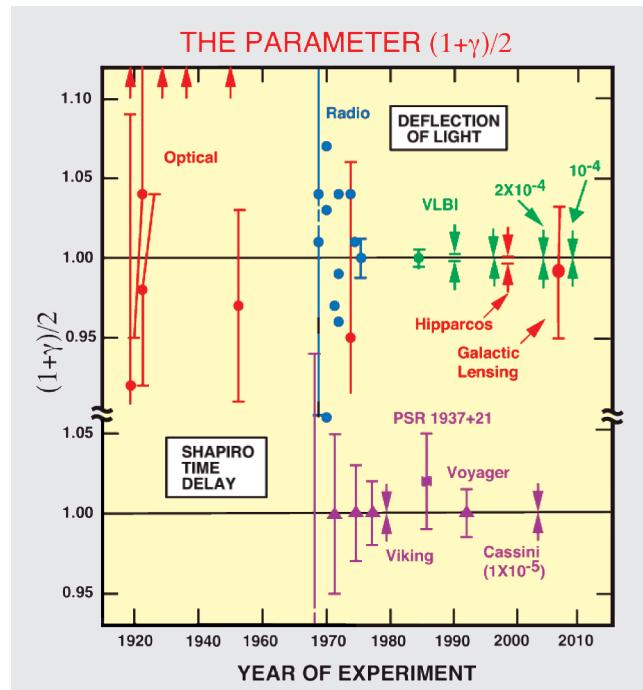


Abb. 5: Verschiedene Messungen von $(\gamma + 1)/2$: gravitative Lichtablenkung und Laufzeitverzögerung (Will 2014)

Saturn-Systems, insbesondere des Mondes Titan (Bertotti et al. 2003):

$$\gamma = 1 + (2,1 \pm 2,3) \times 10^{-5}. \quad (14)$$

3.4 Gravito-magnetische Effekte

Denkt man an Lasermessungen zu Satelliten (SLR), so wird man in diesem Zusammenhang nach relativistischen Effekten in den Bahnen von Erdsatelliten fragen. Zunächst einmal sind solche Bahnen koordinatenabhängige Größen, wobei üblicherweise ein geozentrisches, quasi-inertiales Koordinatensystem, das GCRS (Geocentric Celestial Reference System; z. B. Soffel et al. 2003), zugrunde gelegt wird. Die entsprechende Zeitskala ist TCG (Geozentrische Koordinatenzeit), die wohlbekannte Zusammenhänge mit üblicheren Zeitskalen wie TT (Terrestrische Zeit), TAI (Internationale Atomzeit) oder UTC (koordinierte Weltzeit) aufweist, in welche die Zeidilatation und die gravitative Rotverschiebung eingehen. Relativistische Störungen in den Satellitenbeschleunigungen resultieren aufgrund i) interner und ii) externer Effekte, die in Damour et al. (1994) im Detail beschrieben sind. Die internen Effekte kommen vom Gravitationsfeld der Erde selbst, das im Außenraum durch Massen-(Potenzialkoeffizienten) und Spin-Multipolmomente beschrieben werden kann (Spin: intrinsischer Gesamtdrehimpuls). Der post-Newton'sche Massenmonopolterm, auch Schwarzschild-Term genannt, impliziert die oben erwähnte Periheldrehung des Merkur. Für die Bahn eines Erdsatelliten führt er zu einer relativistischen Drift des Perigäumsargumentes, ω_{SCH} .

Der Spin-Dipolterm, auch Lense-Thirring-Term genannt, beschreibt eine gravito-magnetische Wirkung auf die Satellitenbahn aufgrund der Erddrehung. Die rotierende Erde erzeugt in ihrem Außenraum ein Gravito-magnetfeld, was dazu führt, dass sich die Spinachsen drehmomentenfreier Kreisel, also inertiale Achsen, gegen die Fixsterne drehen (dragging of inertial frames). Bei Satellitenbahnen kommt es dadurch zu einer gravito-magnetischen Präzession des Bahndrehimpulses. Dieser Lense-Thirring-Effekt (Lense and Thirring 1918, Thirring 1918) führt zu einem zusätzlichen $\dot{\omega}_{LT}$, sowie zu einer Knotendrift $\dot{\Omega}_{LT}$. Post-Newton'sche Gezeitenbeschleunigungen, die linear mit dem Abstand zum Geozentrum anwachsen, sind externe Effekte. Hier sind die explizit relativistischen Teile zu vernachlässigen. Schließlich gibt es noch Beschleunigungen, die nicht von der Satellitenbahn abhängen, sondern effektiv eine Drehung des GCRS im Raum beschreiben. Solche Coriolis-Terme treten dadurch auf, dass das GCRS lokal kein Inertialsystem beschreibt (die Achsen eines lokalen Inertialsystems müssten sich mit der Spinachse eines drehmomentenfreien Kreisels mitdrehen); stattdessen sind die räumlichen Achsen des GCRS nach denen des BCRS (bzw. ICRS) ausgerichtet. Der wichtigste dieser Coriolis-Effekte im GCRS ist die geodätische Präzession, die auch de Sitter-Präzession genannt wird (De Sitter 1916). Die geodätische Präzession resultiert physikalisch aus der Bewegung des Erdsystems um die Sonne und führt für Satellitenbahnen zu einer Knotendrift $\dot{\Omega}_{GP}$ von 17,6 mas/a (mas: Millibogensekunde). Seit etlicher Zeit versucht man, solche relativistischen Präzessionen in den Bahnen von Erdsatelliten zu vermessen. Dafür geeignet erscheinen hochgenaue Analysen der Bahnen von LAGEOS I und II sowie von LARES, der im Februar 2012 in seine Bahn gebracht wurde. Theoretisch ergeben sich für diese Bahnen die in Tab. 1 aufgeführten Präzessionsraten (Lucchesi 2015).

In der Realität konkurrieren diese relativistischen Präzessionsraten mit den Auswirkungen der Newton'schen (geraden zonalen) Massenmultipolmomenten; die Abplattung der Erde (J_2) liefert einen Beitrag von der Ordnung 45×10^7 mas/a zur Knotendrehung der LAGEOS-Bahnen. Um die relativistischen Präzessionen messen zu können, braucht man ein hochgenaues Schwerkraftmodell der Erde und eine hochgenaue Modellierung der nicht-gravitativen Bahnstörungen, wie direkter solarer Strahlungsdruck, Erdalbedo und anisotrope thermische Abstrahlung.

Lucchesi and Peron (2014) haben Bahndaten von LAGEOS II über eine Zeitspanne von 13 Jahren ausgewertet, um $\dot{\omega}_{SCH}$ zu bestimmen, wobei das EIGEN-GRACE02S-Modell (Reigber et al. 2005) für die Potenzialkoeffizienten der Erde benutzt wurde. Sie fanden

$$|\epsilon_{\omega} - 1| \leq 2,54 \times 10^{-2}, \quad (15)$$

wobei ein realistischer Fehler angegeben ist. Der Messparameter ϵ_{ω} parametrisiert die Einstein'sche Perigäums-

Tab. 1: Relativistische Präzessionsraten für drei Satelliten in mas/a

	LAGEOS I	LAGEOS II	LARES
$\dot{\omega}_{SCH}$	3278,78	3352,58	10110,13
$\dot{\omega}_{LT}$	31,23	-57,33	-124,53
$\dot{\Omega}_{LT}$	30,67	31,51	118,47

Tab. 2: Verschiedene Messungen von μ

Ciufolini et al. (1997)	$1,1 \pm 0,3$
Ciufolini et al. (1998)	$1,1 \pm 0,2$
Ciufolini and Pavlis (2004)	$0,99 \pm 0,10$
Lucchesi (2007)	$0,99 \pm 0,18$

drehung; in der ART ist $\epsilon_{\omega} = 1$; in der PPN-Theorie wird er durch $|2 + 2\gamma - \beta|/3$ beschrieben.

Seit etwa 1996 ist die Gruppe um Ignazio Ciufolini aktiv dabei, den Lense-Thirring-Effekt in den Bahnbewegungen der beiden LAGEOS-Satelliten nachzuweisen. Die Driftraten beider LT-Präzessionen ist proportional zu $(\gamma + 1)/2$ in der PPN-Theorie, eine Kombination die man durch einen Parameter μ ersetzt. Bisher wurden die in Tab. 2 dargestellten Resultate erzielt.

4 Anwendungen

Seit etlicher Zeit schon müssen Effekte der ART bei der Modellierung geodätischer Messungen berücksichtigt werden, wenn man bestmögliche Genauigkeiten erzielen will. Dies betrifft: Definition und Realisierung aller in die Modellierung eingehender 4-dimensionalen Referenzsysteme wie ITRS, GCRS oder BCRS, die Modellierung aller geodätischer Raumverfahren wie die Global Navigation Satellite Systems (GNSS), Satellite Laser Ranging (SLR), Lunar Laser Ranging (LLR) oder der Very Long Baseline Interferometry (VLBI), die Beschreibung der Bahnen von Satelliten und die Ausbreitung von Signalen.

Am deutlichsten ausgeprägt sind die Effekte der ART im Bereich der Zeit. Nun sind hochgenaue geodätische Messungen in der Regel Messungen von Zeitintervallen. Ohne hochgenaue Zeitmessungen wären die geodätischen Raumverfahren, wie GNSS, VLBI, SLR oder LLR nicht realisierbar. Betrachten wir etwa einen GPS-Satelliten, der sich mit 3.874 m/s bezüglich des Geozentrum bewegt. Nach der SRT wird der Gang einer mit v bewegten Uhr um einen Faktor $\sqrt{1 - (v/c)^2} \approx 1 - 8,3 \times 10^{-11}$ verlangsamt; diese Zeitdilatation liefert einen Beitrag von $7,2 \mu\text{s}$ pro Tag (die Genauigkeit des GPS-Systems liegt bei einigen zehn Nanosekunden). Der Beitrag der gravitativen Rotverschiebung ist sogar noch größer (vgl. Müller et al. 2008). Zusammen mit dem Effekt der Zeitdilatation ergibt sich, dass eine GPS-Uhr um $38 \mu\text{s}$ pro Tag schneller geht

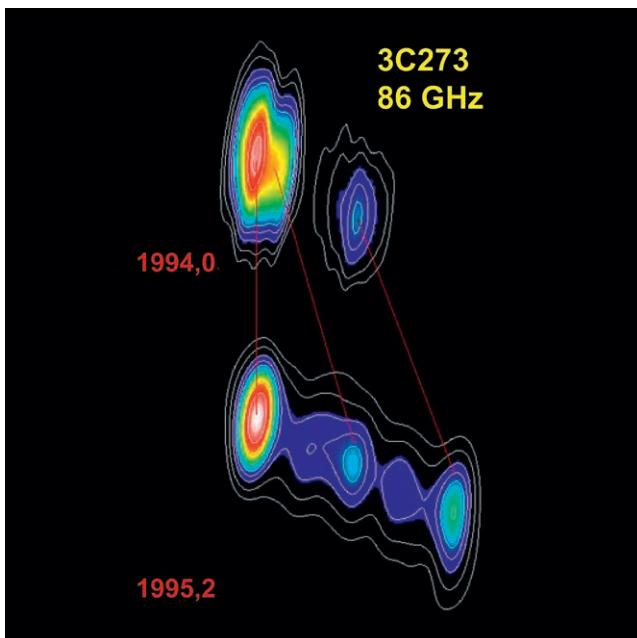


Abb. 6: Radiobilder des Quasars 3C273 bei einer Frequenz von 86 GHz. Man sieht wie sich die Struktur des Quasars zwischen 1994,0 und 1995,2 zeitlich verändert hat.

als eine Vergleichsuhr auf der Erde; aus diesem Grunde wurden die Frequenzen der GPS-Uhren vor dem Start von nominal 10,23 MHz um 0,00455 Hz reduziert. Die Theorie von GNSS stellt in diesem Sinne ein wichtiges Anwendungsbereich der ART dar.

Die Stabilität und Genauigkeit von Frequenzoszillatoren (Atomuhren) hat sich in den letzten Jahren drastisch verbessert; so werden mittels optischer Uhren dafür heutzutage Genauigkeiten im Bereich einiger 10^{-18} (Bloom et al. 2014, Nicholson et al. 2015) erreicht, sodass man in Zukunft Atomuhren sogar als Gravimeter einsetzen kann (Müller et al. 2008, Mai and Müller 2013). Bei Definition und Realisierung praktisch relevanter Zeitskalen wie TCG, TT oder TAI im geozentrischen Referenzsystem oder TCB und TDB im baryzentrischen System (Soffel et al. 2003, Soffel and Langhans 2013) spielen die Effekte der Relativitätstheorie ebenfalls eine bedeutende Rolle.

Neben den GNSS sind SLR, LLR und VLBI wichtig für die Etablierung des ITRS (Internationales Terrestrisches Referenzsystem) und damit auch für die Problematik der mit tektonischen Prozessen verknüpften Verschiebungen von Stationskoordinaten. Die Realisierung des gegenwärtigen zälestischen Referenzsystems, das ICRF, wird mittels VLBI-Messungen von hauptsächlich Quasaren realisiert. Die VLBI liefert uns dazu auch Radiobilder, die uns Auskunft über Struktur und Variabilität der Radioquelle geben (Abb. 6).

Von großer praktischer Bedeutung sind diese geodätischen Raumverfahren für die Problematik der globalen Geodynamik. Bei den heute erreichbaren Messgenauigkeiten können die verschiedenen Subsysteme der Erde, wie Ozeane, Atmosphäre, Kryosphäre, kontinentale Hydrologie, oder innerer Aufbau der Erde inklusive flüssigem äußeren und festem inneren Kern sowie deren physika-

lische Wechselwirkungen miteinander studiert werden. Es ist schon erstaunlich, dass man selbst Phänomene wie El Niño in Variationen der Tageslänge nachweisen kann. Die globale Geodäsie ist dank der bereits heute erreichbaren Messgenauigkeiten der Raumverfahren in der Lage wichtige Beiträge zu Umweltschutz, Klima- oder Katastrophen-Vorhersage zu liefern. Und ohne die ART zu berücksichtigen, können diese ultimatischen Genauigkeiten nicht erreicht werden.

Literatur

- Adelberger, E.G., Heckel, B.R., Smith, G., Su, Y., Swanson, H.E.: Eötvös Experiments, Lunar Ranging, and the Strong Equivalence Principle. *Nature* 347, S. 261–263, 1990a.
 Adelberger, E.G., Stubbs, C.W., Heckel, B.R., Su, Y., Swanson, H.E., Smith, G.L., Gundlach, J.H., Rogers, W.F.: Testing the Equivalence Principle in the Field of the Earth: Particle Physics at Mass Scales Below 1eV?. *Physical Review D* 42, S. 3267–3292, 1990b.
 Adelberger, E.G., Stubbs, C.W., Heckel, B.R., Rogers, W.F.: Searches for New Macroscopic Forces. *Ann. Rev. Nuclear and Particle Science* 41, S. 269–320, 1991.
 Adelberger, E.G., Heckel, B.R., Nelson, A.E.: Tests of the Gravitational Inverse Square Law. *Ann. Rev. Nuclear and Particle Science* 53, S. 77–121, 2003.
 Adelberger, E.G., Gundlach, J.H., Heckel, B.R., Hoedl, S., Schlamminger, S.: Torsion balance experiments: a low-energy frontier of particle physics. *Part. Nucl. Phys.* 62, S. 102–134, 2009.
 Bertotti, B., Iess, L., Tortora, P.: A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. *Nature* 425, 374–376, 2003.
 Bloom, B.J., Nicholson, T.L., Williams, J.R., Campbell, S.L., Bishop, M., Zhang, X., Zang, W., Bromley, S.L., Ye, J.: An Optical Lattice Clock with Accuracy and Stability at the 10^{-18} Level. *Nature* 506, S. 71–75, 2014.
 Boynton, P.E., Crosby, D., Ekstrom, P., Szumilo, A.: Search for an intermediate-range composition-dependent force. *Phys. Rev. Lett.* 59, S. 1385–1389, 1987.
 Chiaverini, J., Smullin, S.J., Geraci, A.A., Weld, D.M., Kapitulnik, A.: New Experimental Constraints on Non-Newtonian Forces below 100 μ m. *Phys. Rev. Lett.* 90, S. 151101, 2003.
 Ciufolini, I., Chieppa, F., Lucchesi, D., Vespe, F.: Test of LenseThirring orbital shift due to spin. *Class. Quantum Grav.* 14, S. 2701–2726, 1997.
 Ciufolini, I., Pavlis, E.C., Chieppa, F., Fernandes-Vieira, E., Prez-Mercader, J.: Test of general relativity and measurement of the Lense-Thirring effect with two Earth satellites. *Science*, 279, S. 2100–2103, 1998.
 Ciufolini, I., Pavlis, E.C.: A confirmation of the general relativistic prediction of the LenseThirring effect. *Nature*, 431, S. 958–960, 2004.
 Damour, T., Soffel, M., Xu, C.: General relativistic celestial mechanics IV. Theory of satellite motion. *Phys. Rev. D*, 49, S. 618–635, 1994.
 De Sitter, On Einstein's Theory of Gravitation and its Astronomical Consequences. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 77, S. 155–184, 1916.
 Eckhardt, D.H., Jekeli, C., Lazarewicz, A.R., Romaides, A.J., Sands, R.W.: Tower Gravity Experiment: Evidence for Non-Newtonian Gravity. *Phys. Rev. Lett.* 60, S. 2567–2570, 1988.
 Einstein, A.: Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Annalen der Physik* 17, S. 132–148, 1905a.
 Einstein, A.: Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik* 17, S. 549–560, 1905b.
 Einstein, A.: Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik* 17, S. 891–921, 1905c.
 Einstein, A.: Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?. *Annalen der Physik* 18, S. 639–641, 1905d.
 Einstein, A.: Zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Preußische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, (Teil 2)*, S. 778–786, 799–801, 1915a.

- Einstein, A.: Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Preußische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, (Teil 2), S. 831–839, 1915b.
- Einstein, A.: Feldgleichungen der Gravitation. Preußische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, (Teil 2), S. 844–847, 1915c.
- Fienga, A., Laskar, J., Kuchynka, P., Le Poncin-Lafitte, Chr., Manche, H., Gastineau, M.: Gravity tests with INPOP planetary ephemerides. In: Klioner, S.A., Seidelmann, P.K., Soffel, M. (eds.): Proceedings of the IAU, Relativity in Fundamental Astronomy: Dynamics, Reference Frames, and Data Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- Fischbach, E., Talmadge, C.L.: The Search for Non-Newtonian Gravity. Springer, New York, 1999.
- Heckel, B.R., Adelberger, E.G., Stubbs, C.W., Su, Y., Swanson, H.E., Smith, G., Rogers, W.F.: Experimental Bounds on Interactions Mediated by Ultra-Low Mass Bosons. *Phys. Rev. Lett.* 63, S. 2705–2708, 1989.
- Heikelmann, R., Schuh, H.: Very long baseline interferometry: accuracy limits and relativistic tests. In: Klioner, S.A., Seidelmann, P.K., Soffel, M. (eds.): Proceedings of the IAU, Relativity in Fundamental Astronomy: Dynamics, Reference Frames, and Data Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, S. 286–290, 2010.
- Hofmann, F., Müller, J., Biskupek, L.: Lunar laser ranging test of the Nordtvedt parameter and a possible variation in the gravitational constant. *A&A* 522, S. L5, 2010.
- Hoskins, J.K., Newman, R.D., Spero, R., Schultz, J.: Experimental tests of the gravitational inverse-square law for mass separations from 2 to 105 cm. *Phys. Rev. D* 32, S. 3084, 1985.
- Hoyle, C.D., Kapner, D.J., Heckel, B.R., Adelberger, E.G., Gundlach, J.H., Schmidt, U., Swanson, H.E.: Submillimeter Tests of the Gravitational Inverse-square Law. *Phys. Rev. D* 70, S. 042004, 2004.
- Kapner, D.J., Cook, T.S., Adelberger, E.G., Gundlach, J.H., Heckel, B.R., Hoyle, C.D., Swanson, H.E.: Tests of the Gravitational Inverse-Square Law at the Dark-Energy Length Scale. *Phys. Rev. Lett.* 98, S. 021101, 2007.
- Lambert, S., Le Poncin-Lafitte, Chr.: Improved determination of γ by VLBI. *A&A* 529, S. A70, 2011.
- Lense, J., Thirring, H.: Über den Einfluss der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einstein'schen Gravitationstheorie. *Phys. Z.* 19, S. 156–163, 1918.
- Lockyer, N., Mester, J.C., Torii, R., Vitale, S., Worden, P.W.: STEP: A status report. In: Lämmerzahl, C., Everitt, C.W.F., Hehl, F.W. (eds.): Gyros, Clocks, Interferometers: Testing Relativistic Gravity in Space. Springer, Berlin, S. 213–247, 2001.
- Long, J.C., Chan, H.W., Churnside, A.B., Gulbis, E.A., Varney, M.C.M., Price, J.C.: Upper limits to submillimeter range forces from extra spacetime dimensions. *Nature* 421, S. 922–925, 2003.
- Lucchesi, D.M.: private communication, 2015.
- Lucchesi, D.M., Peron, R.: LAGEOS II pericenter general relativistic precession (1993–2005): Error budget and constraints in gravitational physics. *Phys. Rev. D* 89(8), S. 082002, 2014.
- Lucchesi, D.M.: The Lense-Thirring effect measurement and LAGEOS satellites orbit analysis with the new gravity field model from the CHAMP mission. *Adv. Space Res.* 39, S. 324–332, 2007.
- Mai, E., Müller, J.: General Remarks on the Potential Use of Atomic Clocks in Relativistic Geodesy. *zfv*, 4/2013, 138, S. 257–266, 2013.
- Michelson, A.A., Morley, E.W.: On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether. *American Journal of Science* 34, S. 333–345, 1887.
- Müller, J., Soffel, M., Klioner, S.: Geodesy and relativity. *J. Geod.* 82, S. 133–145, 2008.
- Müller, J., Hofmann, F., Biskupek, L.: Testing various facets of the equivalence principle using lunar laser ranging. *Class. Quantum Grav.* 29, S. 184006, 2012.
- Müller, J., Biskupek, L., Hofmann, F., Mai, E.: Lunar Laser Ranging and Relativity. In: Kopeikin, S. (ed.): *Frontiers of Relativistic Celestial Mechanics*, vol. 2. de Gruyter, S. 99–146, 2014.
- Nicholson, T.L., Campbell, S.L., Hutson, R.B., Bloom, B.J., McNally, R.L., Zhang, W., Barrett, M.D., Safranova, M.S., Strouse, G.F., Tew, W.L., Ye, J.: Systematic evaluation of an atomic clock at 2×10^{-18} total uncertainty. *Nat. Commun.* 6:6896 doi: 10.1038/ncomms7896, 2015.
- Nobili, A.M., Shao, M., Pegna, R., Zavattini, G., Turyshev, S.G., Lucchesi, D.M., Michele, A.De., Doravari, S., Comandi, G.L., Saravanan, T.R., Palmonari, F., Catastini, G., Anselmi, A.: Galileo Galilei (GG): space test of the weak equivalence principle to 10^{-17} and laboratory demonstrations. *Class. Quantum Grav.* 29, S. 184011, 2012.
- Nordtvedt, K., Jr.: Equivalence Principle for Massive Bodies. I. Phenomenology. *Phys. Rev.* 169, S. 1014–1016, 1968a.
- Nordtvedt, K., Jr.: Equivalence Principle for Massive Bodies. II. Theory. *Phys. Rev.* 169, S. 1017–1025, 1968b.
- Nordtvedt, K., Jr.: Testing Relativity with Laser Ranging to the Moon. *Phys. Rev.* 170, S. 1186–1187, 1968c.
- Nordtvedt, K., Jr.: Lunar laser ranging reexamined: The non-null relativistic contribution. *Phys. Rev. D* 43, S. 3131–3135, 1991.
- Pitjeva, E.: EPM ephemerides and relativity. In: Klioner, S.A., Seidelmann, P.K., Soffel, M. (eds.): Proceedings of the IAU, Relativity in Fundamental Astronomy: Dynamics, Reference Frames, and Data Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, S. 170–178, 2010.
- Reiger, C., Schmidt, R., Flechtnar, F., König, R., Meyer, U., Neumayer, K.H., Schwintzer, P., Zhu, S.Y.: An earth gravity field model complete to degree and order 150 from GRACE: Eigen-GRACE02s. *J. Geodyn.* 39(1), S. 1–10, 2005.
- Shapiro, I.: Fourth Test of General Relativity. *Phys. Rev. Lett.* 13, S. 789–791, 1964.
- Smullin, S.J., Geraci, A.A., Weld, D.M., Chiaverini, J., Holmes, S., Kapitulnik, A.: Constraints on Yukawa-type deviations from Newtonian gravity at 20 microns. *Phys. Rev. D* 72, S. 122001, 2005.
- Soffel, M.: Relativity in Astrometry, Celestial Mechanics and Geodesy. Springer, Berlin, 1989.
- Soffel, M., Klioner, S.A., Petit, G., Wolf, P., Kopeikin, S., Bretagnon, P., Brumberg, V., Capitaine, N., Damour, T., Fukushima, T., Guinot, B., Huang, T., Lindegren, L., Ma, C., Nordtvedt, K., Ries, J., Seidelman, K., Vokrouhlický, D., Will, C., Xu, Ch.: The new IAU 2000 resolutions for astrometry, celestial mechanics, and metrology in the relativistic framework: explanatory supplement. *Astron. J.* 126, S. 2687–2706, 2003.
- Soffel, M., Langhans, R.: Space-Time Reference Systems. Springer, Berlin, 2013.
- Spero, R., Hoskins, J.K., Newman, R., Pellam, J., Schultz, J.: Test of the Gravitational Inverse-Square Law at Laboratory Distances. *Phys. Rev. Lett.* 44, S. 1645–1648, 1980.
- Sumner, T.: Equivalence principle measurements. *Gen. Rel. Grav.* 36, S. 2331, 2004.
- Thieberger, P.: Search for a substance-dependent force with a new differential accelerometer. *Phys. Rev. Lett.* 58, S. 1066, 1987.
- Thirring, H.: Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einstein'schen Gravitationstheorie. *Phys. Z.* 19, S. 33–39, 1918.
- Touboul, P., Metris, G., Lebat, V., Robert, A.: The MICROSCOPE experiment, ready for the in-orbit test of the equivalence principle. *Class. Quantum Grav.* 29, S. 184010, 2012.
- Vessot, R.F.C., Levine, M.W., Mattison, E.M., Blomberg, E.L., Hoffman, T.E., Nystrom, G.U., Farrel, B.F., Decher, R., Eby, P.B., Baugher, C.R., Watts, J.W., Teuber, D.L., Wills, F.D.: Test of Relativistic Gravitation with a Space-Borne Hydrogen Maser. *Phys. Rev. Lett.* 45 (26), S. 2081–2084, 1980.
- Wagner, T.A., Schlamminger, S., Gundlach, J.H., Adelberger, E.G.: Torsion-balance tests of the weak equivalence principle. *Class. Quantum Grav.* 29, S. 184002, 2012.
- Will, C.: Theory and Experiment in Gravitational Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- Will, C.: The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Rev. Relativity* 17, 4 (lrr-2014-4), 2014.

Anschrift des Autors

Prof. Dr. habil. Michael Soffel
Lohrmann-Observatorium
01062 Dresden
michael.soffel@tu-dresden.de

Dieser Beitrag ist auch digital verfügbar unter www.geodaeis.info.