Realistische Unsicherheitsschätzung des Verkehrswertes durch ein Fuzzy-Bayes-Vergleichswertverfahren

Hamza Alkhatib, Alexandra Weitkamp, Sebastian Zaddach und Ingo Neumann

Zusammenfassung

Nicht zuletzt die Immobilien- und Finanzkrise 2007/2008 hat die Bedeutung der Immobilienbewertung aufgezeigt: Der Marktwert hat hohen objektiven Qualitätsanforderungen zu genügen. Außerdem fordert die deutsche Rechtsprechung die Begrenzung der Streuung des Marktwertes bei ±20 %. Das Vergleichswertverfahren als eine der normierten Bewertungsmethoden in Deutschland basiert aus mathematisch-statistischer Sicht auf einer multiplen linearen Regressionsanalyse. Seit Jahrzehnten hat es sich als Standardverfahren für die Analyse des Immobilienmarktes und der Ermittlung des aktuellen Marktwertes in der Praxis etabliert. Der ermittelte Vergleichswert hängt insbesondere von der Anzahl und der Art der Einflussgrößen ab, die in das Regressionsmodell einfließen. Dennoch hat sich der Umgang bzw. die Ermittlung der Unsicherheit für diesen Ansatz seit seiner Einführung nicht erweitert. Die Unsicherheit ergibt sich einerseits aus der inhärenten Unsicherheit der Beobachtungen und aus der Differenz zwischen dem ausgewählten Modell und der Realität andererseits.

Das Ziel dieser Forschung ist es, die Unsicherheitsermittlung in der Regressionsanalyse durch Unterteilung des Unsicherheitsbudgets in epistemische und aleatorische Anteile weiterzuentwickeln und zu verbessern. Während die aleatorischen Anteile die zufällige Variabilität beschreiben, die mit Hilfe der Bayesischen Inferenz modelliert werden kann, charakterisieren die epistemischen Anteile systematische und/oder deterministische Einflüsse, die aus mangelndem Wissen, Annahmen, Vereinfachungen und sprachlichen Formulierungen herrühren. Epistemische Komponenten können durch ausgewählte Ansätze der Fuzzy-Theorie modelliert werden.

In diesem Paper wird ein Fuzzy-Bayes-Ansatz betrachtet, der in der Lage ist, die Unsicherheit des Verkehrswertes durch die oben beschriebenen Merkmale und damit deren Auswirkungen auf den Marktwert zu quantifizieren. Zunächst bedarf es der Aufbereitung der Daten: Die wertbeeinflussenden Einflussgrößen des räumlichen und sachlichen Teilmarktes werden ermittelt. Die Entwicklung des mathematischen Ansatzes erlaubt die Prädiktion der Immobilienwerte innerhalb des ausgewählten räumlichen und sachlichen Teilmarktes. Die vorgestellte Methodik wird anhand eines realen Datensatzes getestet, wobei der Fokus auf einer realistischeren Unsicherheitsabschätzung liegt, ohne den Verkehrswert selber zu verändern. Im Ergebnis liegen präzisere und realistischere Unsicherheiten für Verkehrswerte vor.

Summary

The real estate and finance crisis in 2007/2008 has shown the importance of real estate valuation: The market value has to satisfy high objective quality requirements. Besides, the German jurisdiction demands a maximum dispersion of ±20 % of the market value. The sales comparison approach as one of the valuation methods is from a mathematical-statistical point of view based on a multiple linear regression analysis. Since decades, it has been considered as a standard procedure for analysing the real estate market and to determine the current market value. The estimated comparative value is in particular depending on the number and the type of influencing variables which are considered within the regression model. Nevertheless, the uncertainty estimation of this approach has not been extended since its introduction. The uncertainty here results from the inherent uncertainty of the observations on the one hand, on the other hand from the selected model as imperfect realisation of the reality.

The aim of this research is to develop and enhance the uncertainty estimation in the used regression analysis by dividing the uncertainty budget in epistemic and aleatoric parts. While the aleatoric components describe random variability, which can be modelled by means of Bayesian inferences, the epistemic components characterise systematic and/or deterministic influences which result from unsatisfactory knowledge, assumptions, simplifications and linguistic formulations. Epistemic components can be modelled by selected approaches from fuzzy theory.

This paper introduces a Fuzzy-Bayesian approach, which is able to consider the uncertainty of the market value affected by the above described characteristics and thus to quantify its impact on the market value. As starting point for this investigation, the data basis is prepared: The market value affecting attributes, which have a significant influence on the valuation approaches, were listed and categorised for showcase samples of different spatial and objective partial markets. The establishment of the advanced mathematical approach should allow predicting any real estate values for objects within the selected spatial and objective submarket. The methodology is tested on a real data set. It can be concluded, that this approach should provide more precise and appropriate uncertainty estimations of predicted values without changing the market value itself.

Schlüsselwörter: Vergleichswertverfahren, Fuzzy, Bayesische Regression, Unsicherheiten, unscharfe Variablen, Immobilienbewertung

DOI 10.12902/zfv-0095-2015

1 Unsicherheitsaspekte in der Immobilienbewertung

In Deutschland haben sich seit Jahren die standardisierten und normierten Methoden nach Immobilienwertermittlungsverordnung (ImmoWertV) etabliert. Die Methoden erreichen allerdings immer dann ihre Grenzen, wenn nur wenige Informationen (insbesondere Vergleichsfälle) im jeweiligen Teilmarkt des Immobilienobjektes vorhanden sind: wie in den kaufpreisarmen Lagen. Je weniger Informationen vorliegen, desto größer ist die Herausforderung für den Immobiliensachverständigen: Zwar hat dieser zumeist eine große Expertise, kann diese allerdings nur schwerlich objektivieren, da statistische Auswertungen nicht möglich sind und Informationen von anderer Qualität derzeit nicht in Auswerteverfahren eingebunden werden können. Alkhatib und Weitkamp (2012) und Weitkamp und Alkhatib (2012a) haben nachgewiesen, dass die Anwendung der Bayesischen Regression in kaufpreisarmen Lagen zielführend ist. Hierbei wird Vorwissen – z.B. aus Expertenbefragung oder Gutachten gewonnen – mit Daten – hier Kauffällen aus der Kaufpreissammlung der Gutachterausschüsse für Grundstückswerte – kombiniert. In Weitkamp und Alkhatib (2012b) wurden kaufpreisarme Lagen simuliert: Es ist der Nachweis gelungen, dass die Ergebnisse durch den Einsatz der Bayesischen Regression den funktionalen Zusammenhang präziser und zuverlässiger ermitteln als klassische Methoden (z.B. die multiple lineare Regression). Es gelingt durch die Nutzung des Vorwissens, das Fehlen von Informationen auszugleichen. Somit hat die Bayesische Regression einen klaren Vorteil dadurch, dass Vorwissen verarbeitet werden kann. Während in Weitkamp und Alkhatib (2012a) und Weitkamp und Alkhatib (2012b) die simulierte Stichprobe noch relativ groß war, konnte durch eine Weiterentwicklung des Ansatzes als Robuste Bayesische Regression in Alkhatib und Weitkamp (2013) und Weitkamp und Alkhatib (2014) der Datensatz enorm verringert und auch Ausreißer mit verarbeitet werden.

Alle vergangenen Ansätze modellieren die Unsicherheit mittels Zufallsvariablen: Es handelt sich um rein aleatorische Ansätze. Üblicherweise beinhaltet die Definition der Unsicherheit jedoch zwei Kernelemente: aleatorische und epistemische Anteile. Werden nur aleatorische Variablen modelliert, so führt dies nicht zwangsläufig zu einer zielführenden Methodik, die in der Lage ist, die Unsicherheiten in der Immobilienbewertung realistisch zu bestimmen. Zudem besteht in der Immobilienbewertung die Tendenz, Spannen auszuweisen: So werden z.B. ortsübliche Mieten in Mietspiegeln regelmäßig als Spanne ausgegeben. Auch die Kauffälle identischer Objekte werden regelmäßig streuen: Der Marktwert als solches liegt innerhalb der Spanne und ist mit einer Unsicherheit behaftet.

Für die Bewertung von Immobilien sind statistische Verfahren von besonderer Bedeutung. Es kann festgehalten werden, dass innovative Forschungsansätze die Unsicherheitsmodellierung der derzeitig bestehenden Methoden hinterfragen müssen. Neue Ansätze müssen sowohl den Bedürfnissen der Immobiliendaten gerecht werden, als auch die Definition der Unsicherheit erweitern, um den Verkehrswert und dessen Unsicherheit realistisch zu ermitteln. In Hinblick auf die erweiterte Definition der Unsicherheit besteht ein großes Potential, neue Ansätze zu entwickeln. Ziel der Entwicklungen ist eine realistische mathematische Formulierung der funktionalen Zusammenhänge und die Quantifizierung der Unsicherheiten, um damit die Schätzung des Modells zu verbessern und die Unsicherheiten zu verringern. Als methodischer Ansatz wird daher im Folgenden der Bayesische Ansatz für die Modellierung der aleatorischen Unsicherheiten genutzt und mit der Fuzzy-Theorie für die epistemischen Unsicherheiten kombiniert.

2 Fuzzy-Variablen in der Immobilienbewertung

2.1 Stand der Forschung

Unsicherheiten in den Eingangsgrößen wirken sich auf die Verkehrswertermittlung aus. Der Grund für die Unsicherheiten liegt in der Heterogenität des Marktes: Der Ausgang einer Kaufverhandlung kann als unscharf betrachtet werden. Dennoch verzichten viele Experten auf die Angabe einer Unsicherheit bei der Ermittlung des Verkehrswertes. Einerseits fehlt der Wertermittlung vielfach eine zielführende Ermittlung der Unsicherheiten. Andererseits scheuen Praktiker vor der Angabe großer Unsicherheiten. Hier herrscht die Annahme vor, dass diese bei Laien einen Mangel im Bewertungsprozess suggerieren (Jester und Roesch 2006).

Byrne (1995) stellt fest, dass die Unsicherheit der Ergebnisse zudem aus der imperfekten Information und dem fehlenden Wissen über die Zukunft der Kaufentscheidung entspringen. Können hingegen mögliche Szenarien mit entsprechenden Wahrscheinlichkeiten festgestellt werden, so liegt eine klassische Risikosituation vor. In der Immobilienbewertung werden allerdings die Begrifflichkeiten der Unsicherheit und des Risikos oft synonym verwendet; oftmals ist die Kaufentscheidung nicht risikobehaftet, sondern nur unsicher (Byrne 1995).

Statt der Ableitung einer statistisch basierten Unsicherheit des Marktwertes wird im Fall der Fuzzyfizierung der Marktwert als ein Bereich von Werten dargestellt. Damit wird auf die Tatsache reagiert, dass eine präzise Ermittlung des Marktwertes nicht möglich ist (Engel 2008, Jester und Roesch 2006, Metzger 2010, Petersen 2007, Streich 2003) – ein Fakt, dem derzeit über die Rundung des Marktwertes Genüge getan wird (Kleiber et al. 2010). Die Experten fordern die Angabe von Unsicherheiten, um damit einen Qualitätsparameter für den Bewertungsprozess zu erhalten (Engel 2008, Jester und Roesch 2006, Metzger 2010, Petersen 2007).

Im Bereich der unscharfen Modellierung sind einige Untersuchungen erfolgt:

- Byrne (1995) führte zunächst eine Untersuchung mit fuzzyfizierten Eingangsgrößen durch. Als Programmunterstützung wurde durch die Angabe der Minima und Maxima sowie einer Zugehörigkeitsfunktion basierend auf einer Monte-Carlo-Simulation nach Mollart (1988) eine Fuzzyfizierung vorgenommen. Allerdings wurde auch festgestellt, dass die Methodik noch unvollständig ist. Der Ansatz versucht die Struktur des Problems unscharfer Größen in ihrer Ursache zu lösen und modelliert die Eingangsgrößen typengerecht. Damit ist eine angemessene, wenn auch nicht vollkommene Methode entwickelt worden. Im Ergebnis entsteht ein Modell, welches statistisch überprüfbar ist (Byrne 1995).
- Bagnoli und Smith (1998) verwenden Fuzzy-Logik, um Unsicherheiten in den subjektiv bestimmten Einflussgrößen der Bewertung (z. B. Lage als nah, mittel oder fern) zu modellieren.
- Bonissone und Cheetham (1997) entwickeln einen Neuro-Fuzzy-Ansatz als Kombination von Fuzzy-Regeln mit neuronalen Netzen. Dabei werden Techniken des fallbasierten Schließens mit Fuzzy-Methoden verknüpft, um Ähnlichkeiten zwischen dem Bewertungsobjekt und Vergleichsfällen auf nicht parametrischer Ebene zu ermitteln. Diese Ähnlichkeiten steuern den Selektions- und Aggregationsprozess. Darüber hinaus werden Fuzzy-Methoden genutzt, um die Konfidenzintervalle zu ermitteln.
- Siniak (2001) hat die Verwendung von Fuzzy-Zahlen vorgeschlagen, um die drei klassischen Bewertungsmethoden hinsichtlich Bewertung, Kostengewichtung, Rendite und Marktwerten anzupassen.
- González et al. (2002) präsentieren ein Neuro-Fuzzy-System mit Fuzzy-Logik, um neuronale Netze zu erklären.
- Aurélio Stumpf González und Torres Formoso (2006) nutzen generische Algorithmen, um Fuzzy-Regeln abzuleiten. Generische Algorithmen dienen der Optimierung bzw. sind Suchverfahren, die von der Idee »Überleben des Stärkeren« als natürliche Regel biologischer Systeme inspiriert sind. Diese stellen zufällige, aber gerichtete Suchen für die Lokalisierung der global optimalen Lösung dar.

Insgesamt sind einige Untersuchungen im Bereich der unscharfen Modellierung erfolgt, jedoch wurde in keiner Arbeit eine Differenzierung der unterschiedlichen Unsicherheiten berücksichtigt. Hier ist ein kombiniertes Bayes-Fuzzy-Modell von Vorteil, da durch dieses Unsicherheiten der Eingangsgrößen getrennt nach zufallsbedingten (aleatorischen) und deterministischen (epistemischen) Anteilen in einem Verfahren abgebildet werden können. Diese klassifizierende Unterteilung von Unsicherheiten findet man z. B. in Möller und Beer (2008) sowie in Kiureghian und Ditlevsen (2009).

Die aleatorische Unsicherheit wird durch die zufällige Variabilität des zu beschreibenden Systems verursacht (inhärente zufällige Natur der physikalischen Größen; sie wird deshalb üblicherweise durch Zufallsvariablen modelliert). Die epistemische Unsicherheit hingegen ergibt sich durch mangelhaftes Wissen über das System, Vereinfachungen oder limitierte Verfügbarkeit der Daten. Im Gegensatz zu den epistemischen sind die aleatorischen Unsicherheitskomponenten in der Regel nicht reduzierbar.

Wird diese Unterteilung auf das Gebiet der Verkehrswertermittlung übertragen, existieren epistemische Unsicherheiten, z. B. in den Eingangsgrößen der Lage oder der wirtschaftlichen Restnutzungsdauer. Diese sind zwar unbekannt, aber grundsätzlich als fest anzunehmen. In ihre Bestimmung fließt immer gutachterlicher Sachverstand ein. Eingangsgrößen wie beispielsweise die Grundstücks- oder Wohnfläche unterliegen aleatorischen Unsicherheiten. Auch diese sind unbekannt, unterliegen aber infolge der Ermittlungsmethode einer grundsätzlichen Variabilität. Eine Erhöhung der Anzahl der Messungen/Vergleichsfälle steigert die Genauigkeit des Mittelwertes.

Zur Modellierung der zufallsbedingten Unsicherheiten werden daher wahrscheinlichkeitstheoretische Ansätze (z. B. Bayesische Verfahren) verwendet und für die Modellierung der deterministischen Anteile kommen nichtstochastische Verfahren wie Intervall- und Fuzzy-Theorie in Frage.

In der Bayes-Theorie ist es möglich, Vorwissen über die Eingangsgrößen und deren Unsicherheiten in Form von vollständigen Wahrscheinlichkeitsdichten bei der Auswertung und Analyse sowie darauf beruhender Entscheidungen zu verarbeiten (Koch 2007).

Ist der funktionale Zusammenhang zwischen den Eingangsgrößen linear und existiert kein Vorwissen über Eingangsgrößen (nicht-informative Priori-Dichten), liefern klassische und Bayesische Ansätze identische Ergebnisse. Dies wurde in einen internationalen Standard integriert: »Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM)« (ISO-IEC Guide 2008).

Eine adäquate alternative Modellierung der Unsicherheiten außerhalb der Stochastik kann aus der Intervallmathematik oder der Fuzzy-Theorie abgeleitet werden. Dabei werden die Unsicherheitsbereiche der Eingangsgrößen nicht in Form von Priori-Dichten (wie beim Bayesischen Ansatz) aufgefasst, sondern anhand von Intervallen, unscharfen Mengen oder unscharfen Zahlen berücksichtigt (z. B. Bandemer und Näther 1992, Viertl und Hareter 2006). In diesen Ansätzen wird die Information über Unsicherheiten mit Hilfe von Modellen aus der Mengentheorie integriert. Eine Aufgabe ist hierbei die Konstruktion der sogenannten Zugehörigkeitsfunktionen, die dann Träger der Unsicherheit sind.

Neben den eigenen vertieften Vorarbeiten sollen hier verschiedene Arbeiten aus den Ingenieurdisziplinen angeführt werden. Beer (2006) sowie Möller und Beer (2004) zeigten verschiedene Ansätze und Methoden zum Umgang mit unterschiedlichen Arten von Unsicherheit. Die Arbeit von Wälder (2008) ist ebenfalls in diesem Kontext angesiedelt. Darüber hinaus ist es in der Fuzzy-Theorie möglich, Expertenwissen über die Modellierung von Nested Sets einfließen zu lassen; dabei wird die Meinung von Experten über Zugehörigkeitsfunktionen zusammengefasst (Nguyen und Kreinovich 1996).

Aktuelle Arbeiten zur Modellierung von Unsicherheit haben sich überwiegend mit einer Kombination der oben erwähnten wahrscheinlichkeits- und mengentheoretischen Ansätze beschäftigt. Dabei eignet sich die Bayes-Theorie hervorragend zur Beschreibung der zufälligen Variabilität und die Intervallmathematik bzw. Fuzzy-Theorie zur Modellierung von Unschärfe (z. B. Viertl 2008, Viertl und Hareter 2006). Einen Überblick für eine gemeinsame Modellierung der zufälligen Variabilität und der Unschärfe werden z. B. in Bandemer (2005), Ferson et al. (2002) und Wälder et al. (2009) sowie Kwakernaak (1978, 1979) behandelt.

2.2 Unscharfe Modellierung der Einflussgrößen

Für die Integration von epistemisch bedingten Unsicherheiten in den erarbeiteten Ansätzen soll auf die Fuzzy-Theorie zurückgegriffen werden, die auf unscharfen Mengen basiert. Neben der Identifikation der in ihrer Entstehung als epistemisch zu beurteilenden Einflussgrößen müssen geeignete Zugehörigkeitsfunktionen bestimmt werden, die die unscharfen Eingangsgrößen zutreffend abbilden.

Die Modellierung epistemischer Daten wurde auf exemplarische Einflussgrößen beschränkt. Ansätze für Expertenbefragungen und deren Integration in Bayesische Ansätze lassen sich jedoch in Ergänzung zum Forschungsprojekt den Untersuchungen von Alkhatib und Weitkamp (2012) sowie Weitkamp und Alkhatib (2012a) entnehmen.

Im Rahmen dieses Ansatzes sind die Kaufpreise als Zielgröße der zu formulierenden Modelle grundsätzlich als nicht unscharf zu betrachten. Der Kaufpreis eines einzelnen Objekts ist das Ergebnis individueller Verhandlungen zwischen Käufer und Verkäufer und stellt den Preis dar, der im gegenseitigen Einverständnis gezahlt wird. Unschärfe in dem Resultat kann daher nicht unterstellt werden. Die Modellierung der Unschärfe beschränkt sich auf die Einflussgrößen, die für das Wertermittlungsobjekt als wertrelevant angesehen werden. In die Verkehrswertermittlung fließt viel gutachterlicher Sachverstand ein, da zahlreiche Größen nicht direkt messbar sind oder lediglich eine Abschätzung darstellen. Zudem können – neben linguistischer Unschärfe – auch solche Größen als unscharf betrachtet werden, die zwar numerisch gegeben sind, jedoch nicht exakt auf den jeweiligen Wertermittlungsfall zutreffen.

Als Beispiel dient hier insbesondere der Bodenrichtwert, der sich als durchschnittlicher Lagewert innerhalb einer Bodenrichtwertzone darstellt. Abweichungen von diesem Mittelwert werden hier nicht durch Anpassung, bspw. durch Umrechnungskoeffizienten, berücksichtigt, sondern dieser Mittelwert wird originär weiterverwendet. Diskrepanzen zwischen den zum Bodenrichtwert zugehörigen mittleren Eigenschaften des Richtwertgrundstücks und den einzelnen realen Grundstücken mit den realen Merkmalen sind zu erwarten. Zu- und Abschläge werden in der Praxis durch den Gutachter zumeist rein sachverständig angebracht. Als weiteres relevantes Beispiel einer klassisch epistemischen Größe ist der Ausstattungsstandard zu nennen: Hier erfolgt eine kategoriale Einteilung in die Stufen (z. B. »gut«, »mittel« und »schlecht«).

Während generell unterschiedliche Formen der Zugehörigkeitsfunktionen existieren, wurden im vorliegenden Ansatz Dreiecksfunktionen als geeignet ausgewählt. Das Intervall des Bodenrichtwertes wurde dabei gemäß der sachverständig angesetzten Regel gewählt, dass einzelne Bodenwerte einer Bodenrichtwertzone im Mittel nicht um mehr als 20 % von dem Bodenrichtwert als Durchschnittswert abweichen sollten. Somit ergibt sich ein reelles Intervall von $\pm 20\,\%$ des betrachteten Bodenrichtwertes.

Für den Ausstattungsstandard werden die genannten linguistisch formulierten Einstufungen in die Kategorien 1 bis 7 eingeteilt, denen ein Intervall von $\pm 0{,}5$ zugeordnet wird, sodass sich gleichmäßige Übergänge zwischen den Stufen ergeben. Als Ergebnis ergibt sich ein Marktwert, der eine Fuzzy-Erweiterung beinhaltet. Während der Kaufpreis nicht fuzzyfizierbar ist, kann der Marktwert hingegen als »mittlerer Kaufpreis« im gewöhnlichen Geschäftsverkehr interpretiert werden. Damit wird er als unscharf klassifiziert.

3 Ein Fuzzy-Bayes-Modell für die Immobilienbewertung

Die Bayesische Regressionsanalyse wurde durch Alkhatib und Weitkamp (2012) sowie Weitkamp und Alkhatib (2012a, 2012b) für die Immobilienbewertung entwickelt; Zaddach und Alkhatib (2012, 2013) entwickelten daraus die Bayesische Kollokation. Die Fuzzy lineare multiple Regression wurde durch Tanaka et al. (1982) eingeführt. Im Folgenden wird die Bayesische Regressionsfunktion mit Fuzzy-Intervallen kombiniert.

3.1 Klassische Multiple Lineare Regressionsanalyse

Das klassische Regressionsmodell (vgl. z. B. Fahrmeir et al. 2009) basiert auf der Idee, die Variation der Beobachtungen in der Zielgröße (z. B. der Wohnflächenpreis) durch die Variabilität der m Einflussgrößen (unabhängige Variablen) $x_1, \ldots, x_m$ zu erklären:

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_m x_{im} + \varepsilon_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i \,, \qquad (1)$$

mit $i = 1, \ldots, n$ als Anzahl der Beobachtungen (hier: Kauffälle) und $\beta_0, \ldots, \beta_m$ als $m + 1$ Regressionskoeffizienten.

Der generelle Trend des Modells ist mit Rauschen überlagert, da der funktionale Zusammenhang zwischen der Ziel- und den Einflussgrößen nur wage bekannt ist und kein Wissen über die exakte Funktion existiert. Die Residuen ε_i werden daher eingeführt, um die Inkonsistenz der mathematischen Gleichung zur Realität zu überwinden. In Matrixschreibweise ergibt sich der funktionale Zusammenhang aus Gl. 1 als:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2)$$

mit $\boldsymbol{\beta}$ als unbekannter Vektor der Regressionskoeffizienten und $\boldsymbol{X}$ als Designmatrix.

3.2 Bayesische Regressionsanalyse

Hinsichtlich der Bayesischen Regression liegt der Fokus auf den unbekannten, stochastischen Regressionskoeffizienten $\boldsymbol{\beta}$ basierend auf den Daten $\boldsymbol{y}$. Werden die Regressionskoeffizienten ermittelt, wird eine Normalverteilung der abhängigen Variable unterstellt sowie auch die Linearität des gesamten Modells angenommen, um eine analytisch lösbare Gleichung zu erhalten. Unter diesen Bedingungen hat Koch (2007) eine mathematische Prozedur entwickelt, um die Koeffizienten zu schätzen. Der verwendete Ansatz basiert auf der folgenden analytischen Lösung:

$$\bar{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + \underline{\boldsymbol{V}}^{-1}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \underline{\boldsymbol{V}}^{-1}\underline{\boldsymbol{\beta}}\right)^{-1}. \qquad (3)$$

In den Gleichung ist die Priori-Information durch Unterstriche kenntlich gemacht, die resultierende Posteriori-Information durch Überstriche. Als Resultat der Posteriori-Dichte können die Regressionskoeffizienten durch die Vorinformation präziser ermittelt werden. Zudem werden die Kofaktormatrix und die Konfidenzintervalle (Highest Posterior Density Intervals, HPDI) verkleinert. Die Art, Vorwissen zu generieren, ist nicht strikt spezifiziert: Es kann sowohl als Expertenwissen aus Befragungen generiert als auch aus früheren (Daten-)Analysen (z. B. Vorjahre) gewonnen werden. Der Ansatz mit Expertenwissen wurde für die Immobilienbewertung in Alkhatib und Weitkamp (2012), Weitkamp und Alkhatib (2012a, 2012b) sowie Zaddach und Alkhatib (2013) erfolgreich eingeführt.

3.3 Fuzzy-Bayes-Regressionsanalyse

In diesem Abschnitt wird die Grundform und eine Folge von Schritten zur Konstruktion der Fuzzy-Bayes-Regressionsmodelle vorgestellt, ohne dass alle mathematischen Details erläutert werden können. Ein Fuzzy-Intervall $\tilde{A}$ ist normalerweise definiert als Zugehörigkeitsfunktion $m_{\tilde{A}}(x)$ über die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit dem Zugehörigkeitsgrad 0 und 1:

$$\tilde{A} := \left\{\left(x, m_{\tilde{A}}(x)\right) \middle| x \in \mathbb{R}\right\} \qquad (4)$$

mit $m_{\tilde{A}}: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$. Die Zugehörigkeitsfunktion eines Fuzzy-Intervalls kann beschrieben werden durch ihre linke (L) und ihre rechte (R) Referenzfunktion (s. Abb. 1):

$$m_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{x_m - x - r}{c_l}\right), & \text{für } x < x_m - r \\ 1, & \text{für } x_m - r \le x \le x_m + r \\ R\left(\dfrac{x - x_m - r}{c_r}\right), & \text{für } x_m > x + r \end{cases} \qquad (5)$$

mit x_m als Mittelpunkt, r als Radius und c_l, c_r als Streuparameter der monoton abnehmenden Referenzfunktion (konvexe Fuzzy-Intervalle). Die α-cuts mit $\alpha \in [0,1]$ des Fuzzy-Intervalls $\tilde{A}$ sind definiert als:

$$\tilde{A}_\alpha = \left\{x \in X \middle| m_{\tilde{A}}(x) \ge \alpha\right\} \qquad (6)$$

Eine allgemeinere Definition und weitere Details bezüglicher geodätischer Fragestellungen befinden sich in Neumann (2009).

Das LR-Fuzzy-Modell (s. Gl. 4 und 5) basiert auf der Idee, dass eine Fuzzy-Funktion in linearer Form gemäß Gl. 2 gegeben ist. Anstelle die Gl. 2 mit einem Vektor von »scharfen« Einzelwerten für die Einflussgrößen auszuwerten, wie es in Kap. 3.1 und 3.2 im klassischen Fall geschildert ist, werden im Falle der Fuzzy-Theorie die Gleichungen für einen Vektor mit unscharfen Zufallszahlen analysiert. Hierbei müssen nicht alle Einflussgrößen (x_{ij} in Gl. 1) unscharf sein, da ein »scharfer« Einzelwert als Spezialfall einer unscharfen Zufallszahl angesehen werden kann.

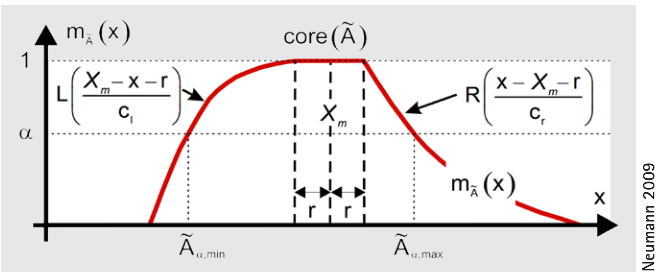

Abb. 1: Fuzzy-Intervall und deren α-Schnitte

In diesem Paper werden unscharfe Zahlen vom Dreiecktyp für die Einflussgrößen verwendet, deren Referenzfunktionen die folgende Form aufweisen:

$$m_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{x_m - x - r}{c_l}\right), & \text{für } x < x_m - r \\ 1, & \text{für } x_m - r \le x \le x_m + r\,. \\ R\left(\dfrac{x - x_m - r}{c_r}\right), & \text{für } x_m > x + r \end{cases} \qquad (7)$$

Die Fuzzy-Zugehörigkeitsfunktion kann wie folgt interpretiert werden: Der Mittelwert x_m beschreibt den wahrscheinlichsten Wert der unabhängigen Variablen, während der Wertebereich die Unschärfe der Variablen widerspiegelt. Werden Fuzzy-Parameter A_j genutzt (z. B. hier in Form der unscharfen Zahlen vom Dreiecktyp) und das Erweiterungsprinzip nach Zadeh (1965) auf die Schätzfunktion angewandt, wird der Fuzzy-Vektor der Regressionsparameter wie folgt gelöst:

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \sup_{\beta = f(x_1,\cdots,x_m)} min\left(m_{\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_m}\right), \forall \beta \in \mathbb{R}^m \qquad (8)$$

mit $m_{\tilde{x}_i}$ mit $i = 1 \ldots m$ als Zugehörigkeitsfunktionen über die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit dem Zugehörigkeitsgrad zwischen 0 und 1. Aufgrund des begrenzten Platzes wird auf die Erläuterung der detaillierten analytischen Lösung der gesamten Prozedur verzichtet und nur die Berechnungsmethode kurz erläutert. Weitere Details zur Berechnung können z. B. Neumann (2009) entnommen werden. Abb. 2 veranschaulicht die Fuzzy-Bayes-Regressionsanalyse, die zusammenfassend auf zwei grundsätzlichen Schritten basiert.

Schritt 1: Die Eingangsdaten werden in der Datenmatrix zusammengefasst als Designmatrix ($\boldsymbol{X}$). Im weiterführenden Beispiel handelt es sich um die Grundstücksfläche, die Wohnfläche, das Alter, den Bodenrichtwert und den Ausstattungsstandard. Unter der Annahme, dass die Daten nicht-unscharf sind, umfasst x_m die Ergebnisse aus der Bayesischen Regression mit nicht-unscharfer Priori-Information der Beobachtungen. Das Ergebnis aus Schritt 1 wird zum Teil als Eingangsdaten in Schritt 2 verwendet.

Schritt 2: Die Eingangswerte (Elemente der Designmatrix $\boldsymbol{X}$) mit epistemischer Unschärfe werden in diesem Schritt fuzzyfiziert (hier als unscharfe Zahlen vom Dreiecktyp). Für verschiedene α-Schnitts von 0,1 bis 1 nimmt die Unschärfe damit linear ab. Es wird eine große Anzahl an Simulationen für verschiedene unabhängige Realisierungen $X_{sim,k}$ der Designmatrix berechnet (hier: 250.000). Das maximale $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{\alpha,max,MC}$ und das minimale $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{\alpha,min,MC}$ eines jeden α-Schnitts aus Gl. 7 werden wie folgt berechnet:

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{\alpha,min,MC} = min\left[\left(\boldsymbol{X}_{sim,k}^T \boldsymbol{X}_{sim,k} + \boldsymbol{V}^{-1}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{X}_{sim,k}^T + V^{-1}\underline{\boldsymbol{\beta}}\right)\right]$$

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{\alpha,max,MC} = max\left[\left(\boldsymbol{X}_{sim,k}^T \boldsymbol{X}_{sim,k} + \boldsymbol{V}^{-1}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{X}_{sim,k}^T + V^{-1}\underline{\boldsymbol{\beta}}\right)\right]$$

$$\text{für } k = 1 \ldots 250.000 \qquad (9)$$

Das Ergebnis ist ein kombiniertes Fuzzy-Bayes-Regressionsmodell in voller Übereinstimmung mit Zadehs Erweiterungsprinzip für den Fuzzy-Teil (vgl. Zadeh 1965). Alle Parameter können sowohl fuzzyfiziert werden als auch Bayesische Anteile haben (Neumann 2009, Gl. 3.67). Durch die Verwendung des Erweiterungsprinzips kann die Schätzfunktion mit einem fuzzyfizierten Parametervektor $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ angegeben werden. Das Modell liefert entsprechend Fuzzy-Bayes-Konfidenzintervalle. Mit Hilfe des funktionalen Zusammenhangs ist eine Prädiktion möglich; der prädizierte Schätzwert hat ebenfalls sowohl unscharfe als auch Bayesische Anteile.

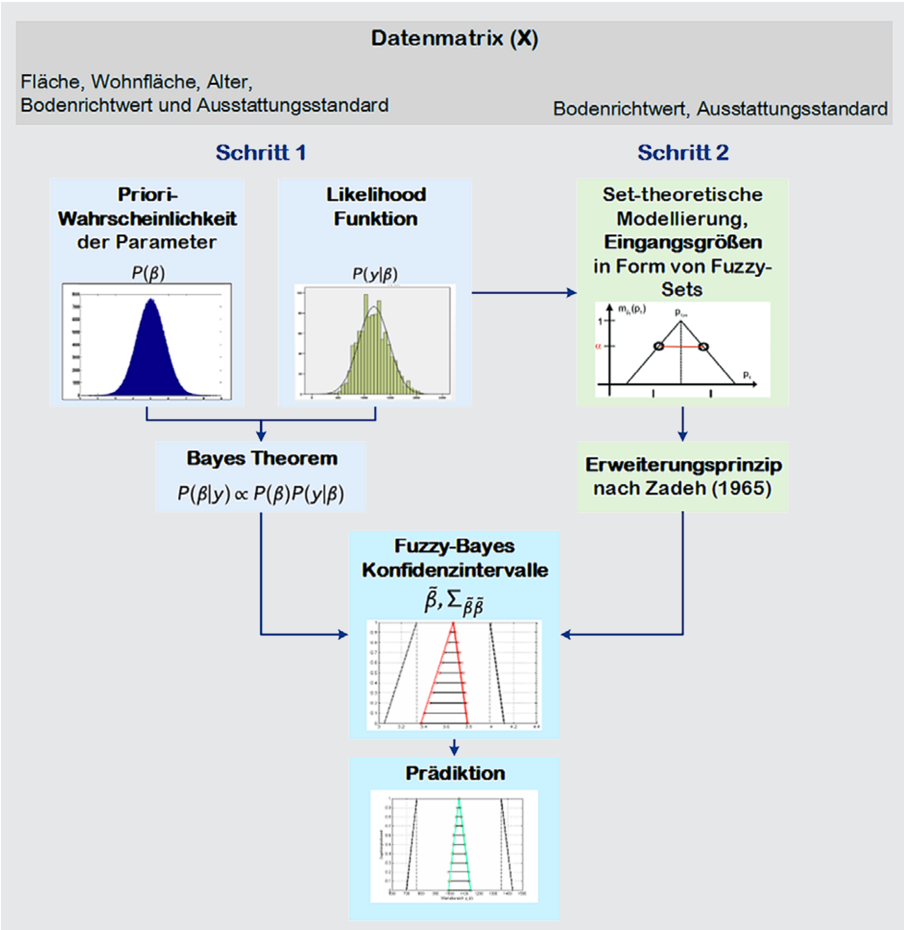

Abb. 2: Ablaufdiagramm der Auswertung im Kontext des beschriebenen Beispiels

4 Anwendung im Teilmarkt der Ein- und Zweifamilienhäuser in Osnabrück

Die Auswertung wurde für die räumlichen Teilmärkte der Stadt und des Landkreises Osnabrück (s. Abb. 3) im Bereich des Gutachterausschusses für Grundstückswerte Osnabrück durchgeführt. Osnabrück liegt im Südwesten von Niedersachsen. Die untersuchte Region ist sehr heterogen: Während die Stadt Osnabrück als Oberzentrum großstädtisch geartet ist, ist insbesondere der nördliche Kreis sehr ländlich geprägt. Die Kauffälle stammen aus der automatisierten Kaufpreissammlung des Gutachterausschusses.

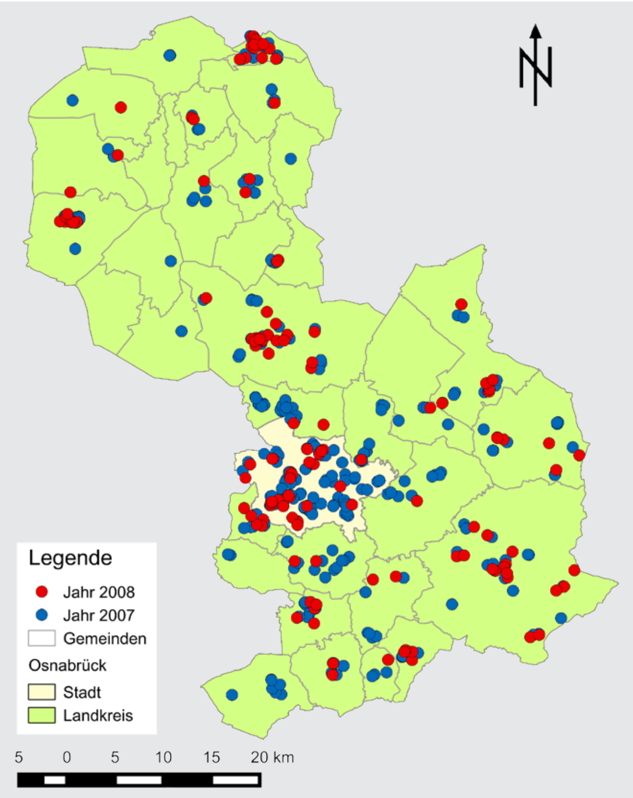

Abb. 3: Verwendete Kauffälle aus dem räumlichen Teilmarkt Osnabrück – blau: Kauffälle aus 2007, rot: 2008

Es wurden rund 280 Kauffälle aus 2007 (blaue Kreise) als Priori-Information und rund 135 Kauffälle aus 2008 als Likelihood (rote Kreise) ausgewertet. Die Auswertung umfasst den sachlichen Teilmarkt der freistehenden Ein- und Zweifamilienhäuser; als Zielgröße der Regression diente der Kaufpreis pro Wohnfläche. Als signifikante Einflussgrößen erwiesen sich für die ausgewählte Stichprobe die Parameter Grundstücksfläche, Bodenrichtwert sowie Alter des Gebäudes, Wohnfläche und die Ausstattung.

Beide Datensätze unterscheiden sich nur unwesentlich voneinander. Die Mittelwerte sind sehr ähnlich; die Spannen variieren nur wenig: im Rahmen der Regressionsanalyse werden mögliche Ausreißer an den Rändern eliminiert. Dies rechtfertigt die kombinierte Verwendung als Priori-Informationen und Likelihood Daten. Der Ansatz ist mit 250.000 Simulationen prozessiert.

5 Erste Erkenntnisse zum Einsatz eines Fuzzy-Bayes-Modells in der Immobilienbewertung

Der Vorteil des Bayesischen Ansatzes liegt in der höheren Genauigkeit der Zielgrößen durch die Nutzung der Priori-Informationen. Der funktionale Zusammenhang wird zunächst nicht verbessert. Andere Arbeiten wie Weitkamp und Alkhatib (2014) weisen nach, dass die Nutzung des Vorwissens sich vornehmlich in kaufpreisarmen Lagen mit nur wenigen Kauffällen (Likelihood Daten) vorteilhaft auswirkt. Es ist anzunehmen, dass auch für das Fuzzy-Bayes-Modell insbesondere im Bezug auf die realistische Unsicherheitsabschätzung in kaufpreisarmen Lagen ähnliche Vorteile zu erwarten sind.

In diesem Beispiel wurden exemplarisch zwei Spalten der Designmatrix unscharf erweitert: die Bodenrichtwerte und der Ausstattungsstandard; das Fuzzy-Intervall wird für Bodenrichtwerte auf 80 %, für den Ausstattungsstandard auf 50 % gesetzt. Als Konsequenz von z. B. $\boldsymbol{X}^T_{sim,k}$, $\boldsymbol{X}_{sim,k}$ – als Teil von Gl. 8, um die entsprechenden Parameter zu berechnen – ergibt sich als Ergebnis eine nicht-lineare Funktion mit unscharfen Einflussgrößen. Als Ergebnis der fuzzyfizierten Einflussvariablen werden im Auswerteprozess auch die Regressionskoeffizienten fuzzyfiziert und es wird ebenfalls ein Fuzzy-Bayes-Konfidenzintervall erzeugt. In Abb. 4 werden die Ergebnisse für die fuzzyfizierten Regressionskoeffizienten dargestellt. Die α-Schnitte werden durch die horizontalen Linien im Abstand 0,1 symbolisiert. Die jeweiligen Endpunkte, die durch rote Kreise markiert sind, ergeben sich durch die minimalen und maximalen Werte, die sich aus den Auswertungen pro α-Schnitt ergeben. Die roten Linien verbinden das Ergebnis für den α-Schnitt bei 1,0 mit den Ergebnissen für die Minimal- und Maximalwerte des α-Schnittes 0,0 und stellen so die theoretisch zu erwartende Lösung dar.

Die senkrechten gestrichelten Linien ergeben sich durch die Konfidenzregionen für den geschätzten Koeffizienten (α-Schnitt 1,0). Hinzu addiert werden die Unsicherheiten, die sich aus der Fuzzyifzierung pro α-Schnitt ergeben und welche durch die in fett schwarz gestrichelten, schrägen Linien dargestellt werden. Durch die Addition der Bayesischen Konfidenzregionen und der Unsicherheit der Fuzzy-Modellierung wird die gemeinsame Unsicherheit erhalten.

Es ist zu beobachten, dass die über die α-Schnitte konstruierten Koeffizienten und deren Konfidenzintervall numerisch etwas instabil sind, da die Anzahl der Simulationen mit 250.000 zu gering ist. Mit nahezu 400 Datensätzen existieren alleine mehr als 160.000 Kombinationen innerhalb der fuzzyfizierten Gleichung. Die Suche über die gesamte Bandbreite der Werte nach α-Schnitten überschreitet damit normale Rechenkapazitäten. Aus diesem Grund wurde die Minima- und Maximasuche entsprechend Gl. 8 auf die Realisierungen von $\boldsymbol{X}_{sim,k}$ reduziert, deren jeweilige Einflussvariable lediglich mit dem minimalen und maximalen Wert des α-Schnitts eingeführt wurde.

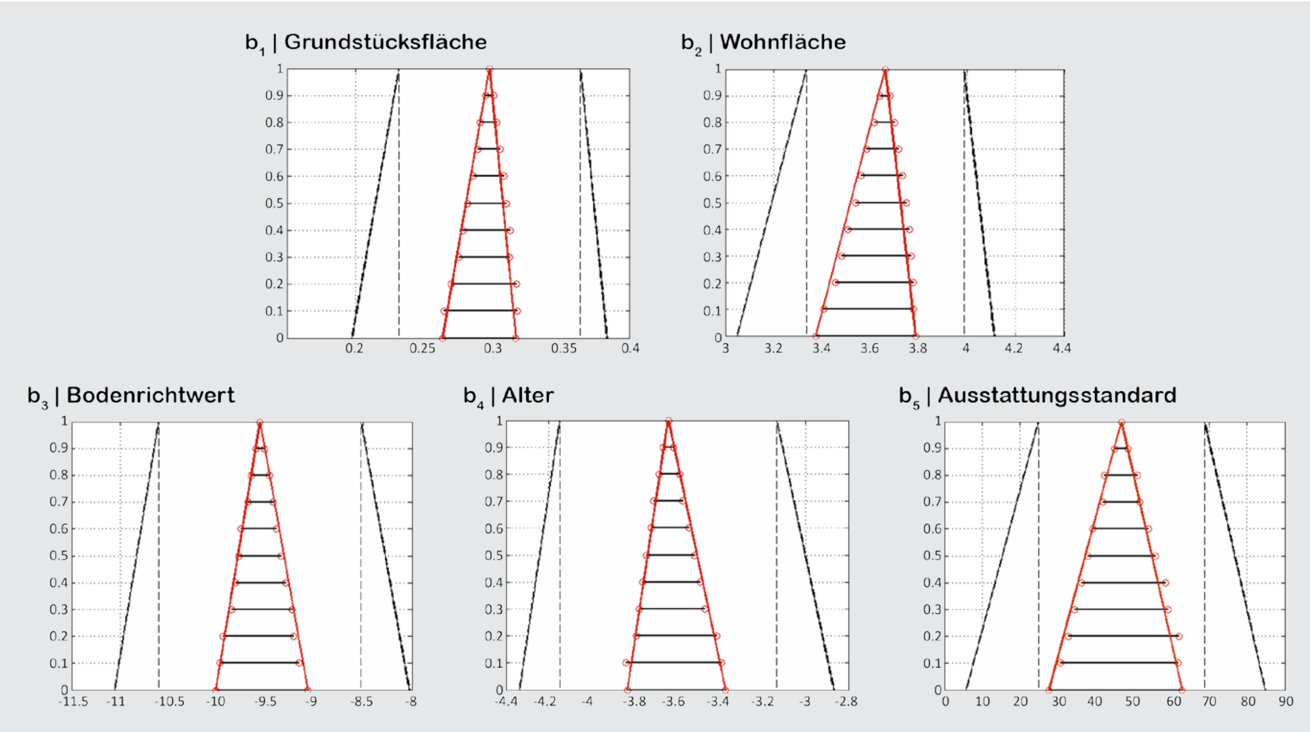

Abb. 4: Regressionskoeffizienten der Regressionsanalyse (Fuzzy-Bayes mit Priori-Informationen)

Im Ergebnis der z.B. quadratischen Nichtlinearität ergibt sich die linke Seite der Dreiecksfunktion bei der Minimasuche als linksschief mit einer Wölbung nach außen für die Regressionskoeffizienten $b_i > |1|$. Die rechte Seite (Maximasuche) ist rechtsschief mit einer Wölbung nach innen (z.B. Bodenrichtwert, Abb. 4). Das Phänomen verändert sich für Regressionskoeffizienten $b_i < |1|$, (z.B. Fläche, Abb. 4). Damit ergibt sich die unscharfe Zugehörigkeitsfunktion aufgrund der nicht-Linearität als unsymmetrisch. Das Ergebnis basierend auf Priori-Informationen ist numerisch instabiler als ohne, da die Anzahl der möglichen Kombinationen entsprechend höher ist. Dieses Phänomen wird ausführlich in Neumann (2009, S. 124) diskutiert.

Die Darstellungsweise der Ergebnisse der Abb. 5 und 6 orientiert sich an Abb. 4 für die Regressionskoeffizienten. Abb. 5 präsentiert den prädizierten Wohnflächenpreis unter Nutzung von Priori-Informationen. Abb. 6 hingegen veranschaulicht das Ergebnis ohne Nutzung von Priori-Informationen. Die roten Kreise weisen jeweils das Minimum und das Maximum der α-Schnitte aus; die grünen Linien verbinden die jeweiligen Extrema der beiden α-Schnitte 0 und 1. Durch Hinzunahme von Priori-Informationen verbessert sich die Unsicherheit: Statt eines Fuzzy-Bayes-Konfidenzintervalls von nahezu 700 EUR/m² minimiert sich dieses auf etwa ein Viertel und umfasst 170 EUR/m² (bezogen auf den α-Schnitt 0).

Die Spanne der Werte für die epistemische Unsicherheit ist durch eine obere und untere Grenze eines jeden α-Schnitts gegeben. Diese liegt unter Nutzung von Priori-Informationen bei 110 EUR/m² anstelle von 150 EUR/m² ohne Verwendung der Priori-Daten (wiederum bezogen auf den α-Schnitt 0). Das bedeutet eine Verbesserung von 25 %.

Werden die α-Schnitte der Regressionskoeffizienten betrachtet, ergeben sich die gleichen Ergebnisse wie in Abb. 5 und 6. Die Spanne der Werte der Regressionskoeffizienten ist unter Nutzung der Priori-Informationen enger als ohne.

Die Differenz zwischen der Prädiktion (Abb. 5 und 6) und der Schätzung der Koeffizienten (Abb. 4) liegt in der mathematischen Struktur für die Fortpflanzung der Fuzzy-Eingangsvariablen begründet. Die Schätzung der Regressionskoeffizienten innerhalb Gl. 8 ist bzgl. der unscharfen Eingangsvariablen stark nicht-linear, sodass

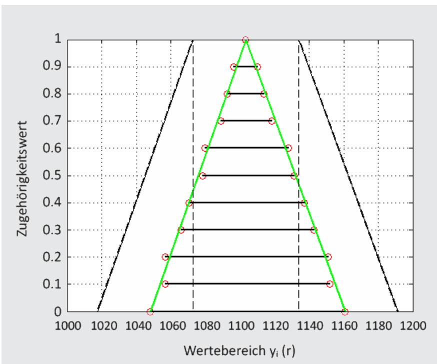

Abb. 5: Schätzwert des Wohnflächenpreises als Ergebnis der Auswertung mit Priori-Informationen

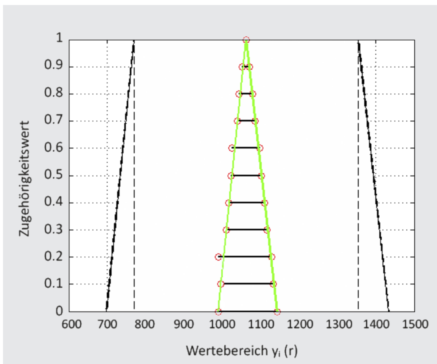

Abb. 6: Schätzwert des Wohnflächenpreises als Ergebnis der Auswertung ohne Priori-Informationen

die unscharfen Zugehörigkeitsfunktionen der Regressionskoeffizienten nicht-lineare Referenzfunktionen aufweisen (konvex bzw. konkav). Im Fall der Prädiktion des Wohnflächenpreises ergibt sich aber eine lineare Gleichung, sodass auch die Referenzfunktionen linear sein sollten. Daher sollten die α-Schnitte (rote Kreise) bei der Prädiktion theoretisch mit der grünen Linie in Abb. 5 und 6 identisch sein. Der wahrnehmbare Unterschied liegt nur an der begrenzten Anzahl der Simulationen.

6 Fazit

In diesem Paper wurde ein Fuzzy-Bayes-Ansatz eingeführt, in dessen Designmatrix die Eingangsgrößen Bodenrichtwert und Ausstattungsstandard unscharf erweitert wurden. Der Unterschied zum klassischen Bayesischen Ansatz ist nur in der unterschiedlichen Behandlung der Unsicherheiten, nicht aber im funktionalen Zusammenhang bzw. der Zielgröße zu finden. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass sich durch die Fuzzyfizierung mittels unscharfer (Fuzzy) Variablen ein realistischeres Unsicherheitsbudget ergibt. Der Mehrwert von realistischeren und zuverlässigeren Methoden in der Immobilienbewertung führt zur Schlussfolgerung, dass weitere Forschungsarbeiten hinsichtlich der Integration von Fuzzy-Variablen benötigt werden.

Weitere Arbeiten sollten in kaufpreisarmen Lagen erfolgen. Daneben bietet sich der Vergleich zu einer rein Bayesischen Modellierung an. Als nächster Schritt sollte eine Fuzzyfizierung erfolgen, die auf dem Expertenwissen mehrerer, nicht nur jeweils einzelner Experten basiert.

Literatur

Alkhatib, Hamza; Weitkamp, Alexandra: Bayesischer Ansatz zur Integration von Expertenwissen in die Immobilienbewertung, Teil 1. In: zfv 137 (02), S. 93–102, 2012.

Alkhatib, Hamza; Weitkamp, Alexandra: Robust Bayesian Regression Approach For Areas With Small Numbers Of Purchases. In: Royal Institution of Chartered Surveyors (Hrsg.): Proceedings of COBRA Conference. New Delhi, 2013.

Aurélio Stumpf González, Marco; Torres Formoso, Carlos: Mass appraisal with genetic fuzzy rule-based systems. In: Property Management 24 (1), S. 20–30, 2006.

Bagnoli, Carlo; Smith, Halbert: The theory of fuzz logic and its application to real estate valuation. In: Journal of Real Estate Research 16 (2), S. 169–200, 1998.

Bandemer, Hans: Handling Uncertainty by Mathematics: A Collection of Useful Hints. Springer, 2005.

Bandemer, Hans; Näther, Wolfgang: Fuzzy data analysis. Kluwer Academic Publishers Dordrecht, 1992.

Beer, Michael: Sampling without probabilistic model. In: Muhanna, R.L.; Mullen, R.L. (Hrsg.): Proceedings of the NSF Workshop on Reliable Engineering Computing – Modeling Errors and Uncertainty in Engineering Computations, 2006.

Bonissone, Piero P.; Cheetham, William: Financial applications of fuzzy case-based reasoning to residential property valuation. In: Fuzzy Systems 1997, Proceedings of the Sixth IEEE International Conference, S. 37–44, 1997.

Byrne, Peter: Fuzzy analysis: A vague way of dealing with uncertainty in real estate analysis? In: Journal of Property Valuation and Investment 13 (3), S. 22–41, 1995.

Engel, Ralf: Das Problem der Unschärfe in der Wertermittlung – Überlegungen zu marktgerechten Bewertungsansätzen in der Ertragswertberechnung. In: Grundstücksmarkt und Grundstückswert (GuG) 19 (05), S. 269–276, 2008.

Fahrmeir, Ludwig; Kneib, Thomas; Lang, Stefan: Regression: Modelle, Methoden und Anwendungen. 2. Aufl. Heidelberg: Springer (Statistik und ihre Anwendungen), 2009.

Ferson, Scott; Ginzburg, Lev; Kreinovich, Vladik; Jorge Lopez: Absolute bounds on the mean of sum, product, max, and min: a probabilistic extension of interval arithmetic. In: Applied Mathematical Sciences 1 (9), S. 395–440, 2007.

González, B.; Adenso-Diaz, B.; Gonzalez-Torre, P.L. (2002): A fuzzy logic approach for the impact assessment in LCA. In: Resources, Conservation and Recycling 37 (1), S. 61–79, 2002.

ISO-IEC Guide: Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the Guide to the expression of uncertainty in measurement – Propagation of distributions using a Monte Carlo method. (98-3:2008, Suppl. 1), 2008.

Jester, Siegfried; Roesch, Gerhard: Der Verkehrswert als Näherungswert. In: Grundstücksmarkt und Grundstückswert (GuG) 17 (03), S. 157–161, 2006.

Kiureghian, Armen Der; Ditlevsen, Ove: Aleatory or epistemic? Does it matter?. In: Structural Safety 31 (2), S. 105–112, 2009.

Kleiber, Wolfgang; Fischer, Roland; Simon, Jürgen: Verkehrswertermittlung von Grundstücken: Kommentar und Handbuch zur Ermittlung von Marktwerten (Verkehrswerten), Versicherungs- und Beleihungswerten unter Berücksichtigung der ImmoWertV. 6. Aufl. Köln: Bundesanzeiger Verlag, 2010.

Koch, Karl-Rudolf: Introduction to Bayesian Statistics. Second, updated and enlarged Edition. Berlin und Heidelberg: Springer, 2007.

Kwakernaak, Huibert: Fuzzy random variables I. Definitions and theorems. In: Information Sciences 15 (1), S. 1–29, 1978.

Kwakernaak, Huibert: Fuzzy random variables II. Algorithms and examples for the discrete case. In: Information Sciences 17 (3), S. 253–278, 1979.

Metzger, Bernhard: Wertermittlung von Immobilien und Grundstücken für Immobilienbesitzer, Kaufinteressenten, Sachverständige, Erben und Makler – Schritt für Schritt zur sicheren Immobilienbewertung ; mit neuer Immobilienwertermittlungsverordnung. 4. Aufl. Freiburg, Br: Haufe, 2010.

Mollart, R.G.: Monte Carlo simulation using LOTUS 123. In: Journal of Property Valuation 6 (4), S. 419–433, 1988.

Möller, Bernd; Beer, Michael: Engineering computation under uncertainty-capabilities of non-traditional models. In: Computers & Structures 86 (10), S. 1024–1041, 2008.

Möller, Bernd; Beer, Michael: Fuzzy randomness: uncertainty in civil engineering and computational mechanics. Springer Science & Business Media, 2004.

Neumann, Ingo: Zur Modellierung eines erweiterten Unsicherheitshaushaltes in Parameterschätzung und Hypothesentests (Dissertation). Leibniz Universität Hannover, 2009.

Nguyen, Hung T.; Kreinovich, Vladik: Nested intervals and sets: concepts, relations to fuzzy sets, and applications. In: Applications of interval computations. Springer, S. 245–290, 1996.

Petersen, Hauke: Was können wir von der Verkehrswertermittlung in der Bundesrepublik an Ergebnissicherheit erwarten? In: Grundstücksmarkt und Grundstückswert (GuG) 17 (04), S. 203–208, 2007.

Siniak, Nikolai: Fuzzy numbers for the assessment of real estate market and property valuation. European Real Estate Society (ERES), 2001.

Streich, Jürgen-Wilhelm: Die ortsübliche Vergleichsmiete. In: Grundstücksmarkt und Grundstückswert (GuG) 14 (01), S. 1–7, 2003.

Tanaka, Hideo; Uejima, Satoru; Asai, Kiyoji: Linear regression analysis with fuzzy model. In: IEEE Trans. Systems Man Cybern 12, S. 903–907, 1982.

Viertl, Reinhard: Fuzzy Bayesian inference. Springer, 2008.

Viertl, Reinhard; Hareter, Dietmar: Beschreibung und Analyse unscharfer Information: Statistische Methoden für unscharfe Daten. Springer, 2006.

Wälder, Konrad; Näther, Wolfgang; Wagner, Sven: Improving inverse model fitting in trees – anisotropy, multiplicative effects, and Bayes estimation. In: Ecological Modelling 220 (8), S. 1044–1053, 2009.

Wälder, Olga: Mathematical methods for engineers and geoscientists. Springer Science & Business Media, 2008.

Weitkamp, Alexandra; Alkhatib, Hamza: Bayesischer Ansatz zur Integration von Expertenwissen in die Immobilienbewertung, Teil 2. In: zfv 137 (02), S. 103–114, 2012a.

Weitkamp, Alexandra; Alkhatib, Hamza: Die Bewertung kaufpreisarmer Lagen mit multivariaten statistischen Verfahren: Möglichkeiten und Grenzen robuster Methoden bei der Auswertung weniger Kauffälle. In: avn 121 (01), S. 1–11, 2014.

Weitkamp, Alexandra; Alkhatib, Hamza: The Bayesian approach in the valuation – a strategy to handle markets with low purchasing prices? In: FIG (Hrsg.): Proceedings of FIG Working Week 2012. Rome, Italy, 2012b.

Zaddach, Sebastian; Alkhatib, Hamza: Anwendung der Kollokation als erweitertes Vergleichswertverfahren in der Immobilienwertermittlung. In: zfv 138 (02), S. 144–153, 2013.

Zaddach, Sebastian; Alkhatib, Hamza: Use of Collocation Method as an Improved Sales Comparison Approach. In: FIG (Hrsg.): Proceedings of FIG Working Week 2012. Rome, Italy, 2012.

Zadeh, L. A.: Fuzzy sets. In: Information and Control 8 (3), S. 338–353, 1965.

Anschrift der Autoren

Dr.-Ing. Hamza Alkhatib | Prof. Dr.-Ing. Ingo Neumann
Leibniz Universität Hannover, Geodätisches Institut
Nienburger Straße 1, 30167 Hannover
alkhatib@gih.uni-hannover.de | neumann@gih.uni-hannover.de

Prof. Dr.-Ing. Alexandra Weitkamp
TU Dresden, Geodätisches Institut, Professur für Landmanagement
Helmholtzstraße 10, 01069 Dresden
alexandra.weitkamp@tu-dresden.de

Dipl.-Ing. Sebastian Zaddach
Landesamt für Geoinformation und Landesvermessung Niedersachsen (LGLN), Regionaldirektion Osnabrück-Meppen
Schilfstraße 6, 48529 Nordhorn
sebastian.zaddach@lgln.niedersachsen.de

Dieser Beitrag ist auch digital verfügbar unter www.geodaesie.info.